I DIE REELLEN ZAHLEN

1 Grundlagen

1.1 Mengenlehre

Def. 1.1

$$\boxed{\text{Eine Menge ist eine Zusammenfassung von eindeutig definierten Objekten, den Elementen}}$$

Beispiele:

(1) Menge der Fenster in 0-115

(2) $M = \{a, b, c, d\}$

(3) $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(4) $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$

(5) Menge Geld $\neq$ Menge

Darstellung einer Menge:

(a) aufzählend: $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

(b) durch Eigenschaft: $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$

(6) $M = \{n \mid n \text{ natürl. Zahlen}\}$

Def. 1.2

$$\boxed{\begin{array}{l} x \text{ Element von } M \Leftrightarrow x \in M \\ A \text{ Teilmenge von } B \Leftrightarrow \text{ wenn } x \in A, \text{ dann } x \in B \Leftrightarrow A \subset B \end{array}}$$

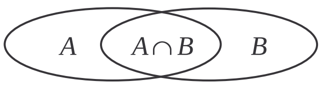
(7) $\left.\begin{array}{l} M = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \\ g = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad g \subset M$

Def. 1.3

$$\boxed{\begin{array}{l} (1) \quad \text{Leere Menge} = \varnothing = \{\ \} \\ (2) \quad \text{Durchschnitt von } A \text{ und } B = \text{Elemente die sowohl in } A \text{ als auch in } B \text{ sind} \\ \qquad \Leftrightarrow \quad \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} A \cap B \end{array}}$$

(8) $\{x \mid 0 < x\} \cap \{x \mid x < 1\} = \{x \mid 0 < x < 1\}$

(9)



(10) $A = \{x \mid x < 3\} \quad B = \{x \mid x < 4\} \qquad A \cap B = \varnothing$

1.2 Symbole der Mathematik

1	$\Rightarrow$	daraus folgt	$(A \text{ antivalent zu } B)$	
2	$\Leftrightarrow$	daraus folgt wechselseitig	$(A \text{ äquivalent zu } B)$	
3	$\forall$	für alle	$(\forall x \in M \quad : x < 0)$	
4	$\exists$	es gibt	$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists$ Nachfolger	$\forall x \in M \quad \exists y \in M \quad : x < y$

1.3 Axiome der Analysis

Bsp. Beweise $2\cdot 2=4$

$2\cdot 2=(1+1)(1+1)=1+1+1+1=4$

$a(b+c)=ab+ac$ $\leftarrow$ Grundgesetze (Axiome)

Axiome der Analysis

$\mathbb{R}=\text{Menge}(a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R},\dots)$

$\forall a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$ $\exists$ Operationen $+,\cdot$ so dass: $a+b\in\mathbb{R}$ $a\cdot b\in\mathbb{R}$

Dabei gelten folgende Gesetze:

1 Axiome der Anordnung

[1] $a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow a=b$ oder $a<b$ oder $a>b$

[2] $a=b, b=c \Rightarrow a=c$

[3] $a\le b, b<c \Rightarrow a<c$

2 Axiome der Addition

[4] $a+b=b+a$ (Kommutativgesetz)

[5] $(a+b)+c=a+(b+c)$ (Assoziativgesetz)

[6] $a+x=b \Rightarrow x$ eindeutig

[7] $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

3 Axiome der Multiplikation

[8] $a\cdot b=b\cdot a$ (Kommutativgesetz)

[9] $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (Assoziativgesetz)

[10] $a\cdot x=b \Rightarrow x$ eindeutig

[11] $a<b, c>0 \Rightarrow ac<bc$ (0: siehe Def. 2.2)

[12] $(a+b)\cdot c=ac+bc$ (Distributivgesetz)

4 weitere Axiome

[13] $a,b>0$ $a+a+a+a\dots+a>b$ möglich (Archimedisches Gesetz)

[14] $a<y \Rightarrow \exists z:\ x\le z\le y$ (Dedekindscher Schnitt)

[15] das Prinzip der vollständigen Induktion ist möglich

Eigenschaften der Axiome
1 Grundlagen der Mathematik (außer Geometrie)
2 willkürlich (jedoch an Natur angepasst)
3 unabhängig (d.h. ein Axiom ist nicht aus anderen ableitbar)
4 widerspruchsfrei

2 Algebra

Def. 2.1

(1)	$a+x=b \quad \Rightarrow \quad x$ eindeutig $\quad \Rightarrow \quad x=b-a$	[6]
(2)	$a \cdot x=b \quad \Rightarrow \quad x$ eindeutig $\quad \Rightarrow \quad x=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}=b:a$	[10]

Def. 2.2

Null, Eins
(1) $a-a=0$
(2) $\frac{a}{a}=1$
(3) $0-a=-a$

Satz 2.1

$$a+(b-c)=(a+b)-c$$

Bew: sei $c+x=b \quad \Rightarrow \quad x=b-c$ Def. 2.1

$a+b=a+b$
$a+(c+x)=a+b$ $\quad b=c+x$
$a+(x+c)=a+b$ [4]
$a+((b-c)+c)=a+b$
$(a+(b-c))+c=a+b$ [5]
$a+(b-c)=(a+b)-c$ Satz 2.1

Satz 2.2

(a) $a+0=a$
(b) $a+(-b)=a-b$
(c) $-(-a)=a$
(d) $a-(-b)=a+b$

Bew: (a) $a+x=a$
$\Rightarrow \quad x=a-a$ Def. 2.1
$\Rightarrow \quad x=0$ Def. 2.2
$\Rightarrow \quad a+0=0$

(b) $a+(-b)$
$\Rightarrow \quad a+(0-b)$ Def. 2.1
$\Rightarrow \quad (a+0)-b$ Def. 2.1
$\Rightarrow \quad a-b$ (a)

(c) $0=a-a$ Def. 2.1
$\Rightarrow \quad 0=a+(-a)$ (b)
$\Rightarrow \quad a+(-a)=0$
$\Rightarrow \quad a=0-(-a)$ Def. 2.1

(d) $a-(-b)$
$\Rightarrow \quad a+(-(-b))$ (b)
$\Rightarrow \quad a+b$ (c)

Satz 2.3

Die Regeln der Algebra, Bruchrechnung und Dezimalrechnung sind aus den Axiomen ableitbar

3 Zahlentypen

3.1 Die Reellen Zahlen

Def. 3.1

(1) die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ heißen natürliche Zahlen
(2) $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ mit zusätzlich $0)$
(3) x natürliche Zahl $\Leftrightarrow$ $x \in \mathbb{N}$

Satz 3.1

Es gibt unendlich viele $\mathbb{N}$

Bew: indirekte Beweis:
indirekte Annahme: $\exists$ höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $\mathbb{N}\{1, 2, 3, \ldots n\}$ $n+1 \notin \mathbb{N}$, Widerspruch $\Rightarrow$ Satz richtig

Bsp: $4 \in \mathbb{R} \Rightarrow -4 \in \mathbb{R}$

Def. 3.2

(1) Die Zahlen $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ heißen ganze Zahlen
(2) $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen
(3) n ganz $\Leftrightarrow$ $n \in \mathbb{Z}$

Satz 3.2

(1) $\exists$ unendlich viele ganzen Zahlen
(2) Die Menge der $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Bew: (2) trivial
(1) folgt aus (2)

Satz 3.3

Jede ganze Zahl ist als Differenz zweier natürlichen Zahlen schreibbar
oder: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} \quad x = n - m$

Bew: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Fall 1: $x > 0 \Rightarrow x = (x+1) - 1$
Fall 2: $x < 0 \Rightarrow x = 4 - 4$
Fall 3: $x = 0 \Rightarrow x = 1 - (1 - x)$

Def. 3.3

(1) die Zahlen $r = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ heißen rationale Zahlen
$\left[r = \text{rational} \Rightarrow r = \frac{n}{m} \right]$
(2) $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen

Satz 3.4

Die natürlichen und ganzen Zahlen sind (spezielle) rationale Zahlen, d.h. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Bew: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{x}{1}$

Division durch Null

$\frac{m}{0} = ?$ $\qquad \frac{m}{0} = r \Rightarrow m = 0 \cdot r$

Def. 3.4

Die Division duch 0 ist nicht erlaubt

Hilfssatz: $n^2 \in \mathbb{N}$

n^2 gerade $\Rightarrow$ n gerade

Bew: indirekter Beweis

indirekte Annahme: n ungerade

$\Rightarrow \quad n = 2p+1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = \underbrace{4p^2 + 4p}_{gerade} + 1$ ungerade, Widerspruch

Satz 3.5 $\boxed{\text{Es gibt Zahlen, die nicht rational sind}}$

Bew: indirekter Beweis

indirekte Annahme: alle Zahlen rational

$\Rightarrow \quad x \cdot x = 2 \quad \Rightarrow \quad x$ rational $\Rightarrow \quad x = \dfrac{n}{m}$ $(n, m$ ganz, teilerfremd$)$

$\Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{n^2}{m^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow \quad n^2$ gerade $\underset{\text{Hilfssatz}}{\Rightarrow}$ n gerade

$\Rightarrow \quad n = 2n' \quad \Rightarrow \quad n^2 = 4n'^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow \quad 2n'^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2$ gerade $\underset{\text{Hilfssatz}}{\Rightarrow}$ m gerade

Def. 3.5 $\boxed{\text{Alle Zahlen die nicht rational sind, heißen irrational (Symbol } \mathbb{I})}$

Bsp: $\sqrt{2}, \pi, e$

Def. 3.6 $\boxed{\text{Die rationalen und irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen (Symbol } \mathbb{R})}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

3.2 Dezimalzahlen

Def. 3.7

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x = q_0 + \dfrac{q_1}{10^1} + \dfrac{q_2}{10^2} + \dfrac{q_3}{10^3} + \ldots \quad \text{mit } q_0 \in \mathbb{Z}, \quad q_j \in \mathbb{N} \quad (0 \le q_j \le 9) \\ \quad \Leftrightarrow \quad q_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = \text{Dezimalzahl} \end{array}}$$

Bsp: $31,478 = 31 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{8}{10^3}$

endliche Dezimalzahl: $-0,534$

unendliche periodische: $0,1212121212\ldots$

unendliche nicht periodische: $0,2435458\ldots$

Satz 3.6 $\boxed{\text{Jede endliche und jede unendliche periodische zahl ist eine rationale Zahl}}$

statt Bew: (a) $0,143 = \dfrac{143}{100} \in \mathbb{Q}$

(b) $x = 0,14141414\ldots$

$$\begin{array}{rl} 100x = & 14,14141414\ldots \\ \Rightarrow \quad - \quad x = & 0,14141414\ldots \\ \hline 99x = & 14 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14}{99}$$

Satz 3.7 $\boxed{\text{Jede irrationale Zahl ist eine unendliche nicht periodische Dezimalzahl}}$

Bew: indirekter Beweis

indirekte Annahme: x nicht (unendlich / periodisch)

$\Rightarrow$ endlich oder unendlich periodisch

$\Rightarrow$ rational, Widerspruch

Bsp: $\sqrt{2} = 1,414213\ldots$

4 Summen, Produkte, Potenzen, Wurzeln

Def. 4.1

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j}$$

Beispiele:

(1) $\sum_{i=1}^{6} d_i = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6$

(2) $\sum_{j=1}^{8} j = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$

(3) $\sum_{m=1}^{4} m^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(4) $\sum_{s=1}^{7} 1 = 1+1+1+1+1+1+1 = 7$

Def. 4.2

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j}$$

Beispiele:

(1) $\prod_{j=1}^{4} \frac{j(j+1)}{j^2} = \left(\frac{1 \cdot 2}{1}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 4}{8}\right)$

(2) $\prod_{j=1}^{4} (-1) \cdot a_j = (-1) \cdot a_1 \cdot (-1) \cdot a_2 \cdot (-1) \cdot a_3 \cdot (-1) \cdot a_4 = -\prod_{j=1}^{4} a_j$

(3) $\prod_{n=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^{1} j^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{2} j^2 \right) = \left(1^2\right) \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$

(4) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{k} m^2 = \left(\sum_{m=1}^{1} m^2 \right) + \left(\sum_{m=1}^{2} m^2 \right) + \left(\sum_{m=1}^{3} m^2 \right) = \left(1^2\right) + \left(1^2 + 2^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = 20$

Def. 4.3

$a \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$

(1) $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a \quad (n \text{ mal})$

(2) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

(3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(4) $n-$te Wurzel $a \geq 0$ ist die nicht negative Zahl b, deren $n-$te Potenz b^n genau a ergibt
d.h.: $\sqrt[n]{a} = b \quad \Rightarrow \quad a = b^n \quad (a, b \geq 0)$

(5) r rationale Zahl $\Rightarrow \quad r = \frac{n}{m} \quad \Rightarrow \quad a^r = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad (a^n \geq 0)$

Bsp: $0{,}3^0 = 1$ $\qquad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ $\qquad \sqrt[2]{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^3 = 8$ $\qquad \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$

$\pm\sqrt{16} = \pm 4$ $\qquad \sqrt{-3}$ nicht definiert $\qquad 7^{1,5} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 18{,}5203$

Anmerkung: nicht definiert ist $\sqrt{a}$ mit $a < 0$

Satz 4.1

Potenzen und Wurzelrechnung

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = \left(a^{n-m}\right) \qquad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad (n, m = \text{ganz})$

Anmerkung: Satz 4.1 erweiterbar für $n = \text{rational}$

5 Betrag einer Reellen Zahl

Def. 5.1

$$\boxed{a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |a| = \sqrt{a^2} \quad (\text{Betrag})}$$

Bsp: $|7| = \sqrt{49} = 7$ $\quad |-7| = \sqrt{49} = 7$ $\quad |0| = 0$ $\quad$ Vektoren $|\vec{x}| = |\sqrt{\vec{x}^2}|$

Satz 5.1

(a) $|a| = |-a|$

(b) $|a-b| = |b-a|$

(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(d) $\frac{1}{|a|} = |\frac{1}{a}|$

(e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichnug)

(f) $|a-b| \geq |a| - |b|$

statt Bew:

(a) $|5| = |-5| = 5$

(b) $|3-8| = |8-3| = 5$

(c) $|7 \cdot (-9)| = |7| \cdot |-9| = 63$

(d) $\frac{1}{|-3|} = |\frac{1}{-3}| = |-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

(e) $|5+(-4)| \leq |5| + |-4| \quad \Rightarrow \quad 1 < 9$

(f) $|9-1| \geq |9| - |1| \quad \Rightarrow \quad 8 = 8$

6 Die komplexen Zahlen

6.1 Die Grundlagen

Bsp: $x^2+1=0$ $\Rightarrow$ $x^2=-1$ $\Rightarrow$ $x=\pm\sqrt{-1}\underset{?}{=}\pm j$

$x^2+2x+10=0$ $\Rightarrow$ $x=-1\pm\sqrt{1^2-10}=-1\pm\sqrt{-9}$ $\Rightarrow$ $-1\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=-1\pm 3j$

$\sqrt{-1}=i=j$

Def. 6.1

(1) $j^2=-1 \quad \left(j=\sqrt{-1}\right)$

(2) $z=a+bj \quad (a,b\in\mathbb{R})$ = komplexe Zahl

a = Realteil von z $\left(\mathrm{Re}(z)\right)$

b = Imaginärteil von z $\left(\mathrm{Im}(z)\right)$

Bsp: $z=7-5j \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z)=7$ und $\mathrm{Im}(z)=-5$

$w=1+j$ $\quad s=0+j=j$ $\quad u=3+0j=3$

$a\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z=a+0j$ komplex

Def. 6.2

$z=a+bj \qquad w=u+vj$

(1) $z+w=(a+u)+(b+v)j$

(2) $z-w=(a-u)+(b-v)j$

Bsp: $z=3+j \qquad w=2+7j$

$z+w=5+8j$

$z-w=1+(-6)j=1-6j$

$z=1+2j \qquad w=2+3j$

$z\cdot w=(1+2j)(2+3j)=2+3j+4j+6j^2=2+7j-6=-4+7j$

Def. 6.3

$z=a+bj \qquad w=u+vj$

$z\cdot w=(a+bj)(u+vj)=(a\cdot u-b\cdot v)+(a\cdot v+b\cdot u)j$

Bsp: $(3+4j)(1+2j)=3-8+6j+4j=-5+10j$

$(1+j)^2=1+2j+j^2=2j$

$j^5=j^2\cdot j^2\cdot j=j$

Def. 6.4

Division

$$\frac{z}{w}=\frac{(a+bj)(u-vj)}{(u+vj)(u-vj)}=\frac{au+bv+(bu-av)j}{u^2+v^2+uvj-vuj}=\frac{au+bv}{u^2+v^2}+\frac{bu-av}{u^2+v^2}j$$

Bsp:

$$\frac{3+4j}{1+2j}=\frac{(3+4j)(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}=\frac{3+8-6j+4j}{1^2-(2j)^2}=\frac{11-2j}{1^2+2^2}=2,2-0,4j$$

$$\frac{1}{1-j}=\frac{(1+0j)(1+j)}{(1-j)(1+j)}=\frac{1+j}{2}=0,5+0,5j$$

$$\frac{4-j}{1+8j}=\frac{(4-j)(1-8j)}{(1+8j)(1-8j)}=\frac{4-32j-j+8j^2}{1-64j^2}=\frac{4-33j-8}{1+64}=-\frac{4}{65}-\frac{33}{65}j$$

$$\frac{1}{j}=\frac{1+0j}{0+j}=\frac{(1+0j)(0-j)}{(0+j)(0-j)}=\frac{-j}{j(-j)}=\frac{-j}{-j^2}=\frac{-j}{-(-1)}=-j$$

Satz 6.1

Summe, Produkt, Differenz und Quotient zweier komplexen Zahlen ist eine komplexe Zahl

Bsp: $z = 2 + 3j$

$z^2 = (2+3j)(2+3j) = 4 - 9 + 6j + 6j = -5 + 12j \qquad \Rightarrow \quad w = 1 + z^2 + 4z^3$

$z^3 = (-5+12j)(2+3j) = -10 - 36 - 15j + 24j = -46 + 9j \qquad = 1 + (-5+12j) + 4(-46+9j) = -188 + 48j$

$z = 2 + j \qquad w = 3 - 4j$

$z + 3x = 4w$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}(4w - z) = \frac{1}{3}\left[4(3-4j) - 2 - j\right] = 12 - 16j - 2 - j = 10 - 17j$

Def. 6.5

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Betrag einer komplexen Zahl}\\ z = a + bj \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0\end{array}}$$

Bsp: $z = 3 + 4j \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Def. 6.6

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Konjungiert komplexer Wert}\\ z = a + bj \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = a - bj \quad \text{der zu } z \text{ konjugierter Wert}\end{array}}$$

Bsp: $z = 0{,}3 + 0{,}4j \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = 0{,}3 - 0{,}4j$

$w = 1 - j \quad \Rightarrow \quad \overline{w} = 1 + j$

$\overline{\overline{z}} = z$

Satz 6.2

$$\boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2}$$

Bew: $z \cdot \overline{z} = (a + bj)(a - bj) = a^2 - (bj)^2 = a^2 - b^2 j^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^{\,2} = |z|^2$

Anwendung: Division

$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \overline{w}$

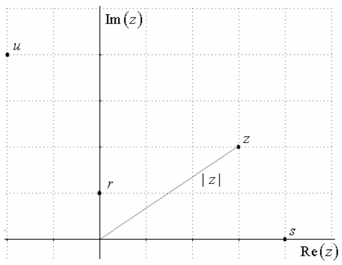
Bsp: $x^2 + px + q = 0 \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Fall 1: $\frac{p^2}{4} - q > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 reelle Zahlen x_1, x_2

Fall 2: $= 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{2}$

Fall 3: $< 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q} \cdot j = \alpha \pm \beta j = \begin{cases} x \\ \overline{x} \end{cases}$

6.2 Graphische Darstellung komplexer Zahlen



Gauß`sche Zahlenebene

$z = 3 + 2j$

$u = -2 + 4j$

$r = j = 0 + 1j$

$s = 4 = 4 + 0j$

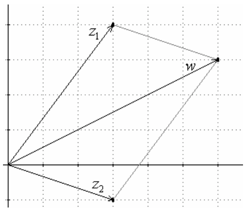
Zuordnung: Komplexe $\leftrightarrow$ Punkte der Ebene

Eigenschaften

1 Reelle Achse = Zahlengerade

2 $z = a + bj \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ = Abstand vom Ursprung $(0|0)$

3 Addition: $z_1 = 3 + 4j; \quad z_2 = 3 - j \qquad w = z_1 + z_2 = 6 + 3j$



$$z = a + bj = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

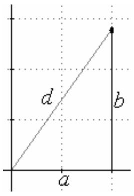
Satz 6.3

> Die Summe zweier komplexer Zahlen erhält man, indem man in der Gauß`schen Zahlenebene die Pfeile hintereinander legt.

Satz 6.4

> (1) $|z|$ = der Abstand der Zahl z vom Ursprung
> (2) $|z - w| = |w - z|$ = der geometrische Abstand der Zahlen z und w

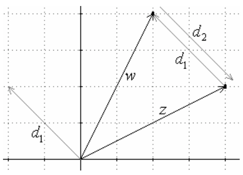
Bew: (1)



$z = a + bj$

$d = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

(2)



$z + d_1 = w \qquad w + d_2 = z$

$d_1 = w - z \qquad d_2 = z - w$

7 Gleichungen

(1) lineare Geichungen: $ax+b=c \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{c-b}{a} \quad (a \neq 0)$

(2) quadratische Gleichungen: $x^2+px+q=0$

Bew: $x^2+px+\dfrac{p^2}{4}=-q+\dfrac{p^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2=\dfrac{p^2}{4}-q \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$

(3) Gleichungen höheren Grades: Bsp: $3x^3-2x^2+4x-7=0$

(4) transzendente Gleichungen: Bsp: $\sin x = x^2 \qquad 1-\ln x=\cos x$

8 Ungleichungen

Bsp: $5<8$

$x \leq |x| \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

$\frac{x}{3}<\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\infty < x < 1{,}5$

Satz 8.1

> Bernoullische Ungleichung
> Vorraussetzung: $n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$ und $a>-1,\ n \geq 2,\ a \neq 0$
> Behauptung: $(1+a)^n > 1+n\cdot a$

Bew: vollständige Induktion

[1] richtig für $n=2$; denn $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+n\cdot a$

[2] Schluß von k auf $k+1$
Induktionsannahme: richtig für $n=k$

$\Rightarrow \quad (1+a)^k > 1+ka$

$\Rightarrow \quad (1+a)^k(1+a) > (1+ka)(1+a)$

$\Rightarrow \quad (1+a)^{k+1} > 1+ka+a+ka^2 > 1+(k+1)a+ka^2 > 1+(k+1)a$

Satz 8.2

> (1) Eine Ungleichung bleibt erhalten, wenn man beide Seiten mit einer positiven Zahl multipliziert (dividiert)
> (2) in einer Ungleichung darf man auf beiden Seiten Zahlen addieren
> (3) In einer Ungleichung wird aus $<$ ein $>$ oder umgekehrt, falls man beide Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert (dividiert)
> (4) In einer Ungleichung wird ein $<$ ein $>$ oder umgekehrt bei einer Kehrwertbildung

Statt Bew:

Bsp: (1) $3<8 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 3 < 2\cdot 8 \quad \Rightarrow \quad 6<16 \qquad x \leq |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{|x|} \leq 1$

(2) $\frac{1}{4}<\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}+1<\frac{1}{2}+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}<\frac{6}{4} \qquad 3+x \leq 18 \quad \Rightarrow \quad 3 \leq 18-x \quad \underset{\text{oder}}{\Rightarrow} \quad x \leq 15$

(3) $3<8 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot(-1) > 8\cdot(-1) \quad \Rightarrow \quad -3<-8$

(4) $4<8 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}>\frac{1}{8}$

9 Kombinatorik

9.1 Permutation

Def. 9.1

> Gegeben sei eine Menge mit $n-$Elementen. Jede Aneinanderreihung der $n-$Elementen heißt Permutation.

Bsp: $M=\{1,2,3\} \quad \Rightarrow \quad 123,\ 321,\ 321,\ 132,\ 231,\ 213$

Def. 9.2

> $n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow$
> $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \quad (n-\text{Fakultät})$
> $0! = 1$

Satz 9.1

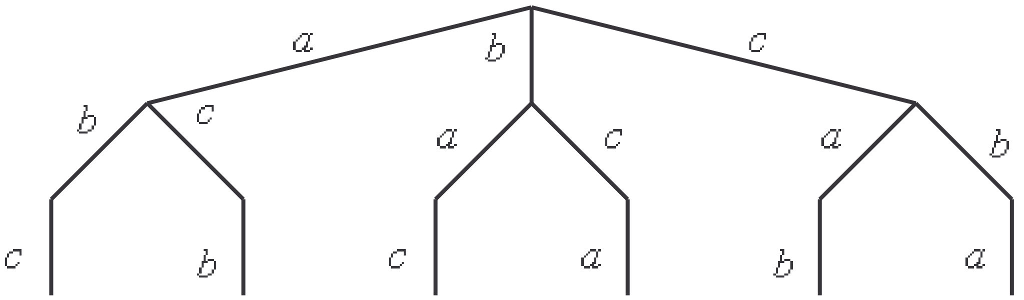
> Einer Menge mit $n-$Elementen hat genau $n-$Fakultät verschiedene Permutationen

Bew: $(\text{für } n=3) \quad M=\{a,b,c\}$

1. Element:

2. Element:

3. Element:



Anzahl $= 3 \cdot 2 \cdot 1$

Bsp: 8 Sportler nehmen an einem 400m-Lauf teil. Wieviel Möglichkeiten gibt es beim Zieldurchlauf? $\Rightarrow \quad 8! = 40320$

Wieviel Möglichkeiten gibt es 14 Bücher nebeneinander zustellen? $\Rightarrow \quad 14! = 8,72 \cdot 10^{10}$

Wieviel mögliche Skatmischungen gibt es? $\Rightarrow \quad 32! \approx 2,63 \cdot 10^{35}$

9.2 Binominalkoeffizienten

Def. 9.3

> (1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$
>
> (2) $\binom{n}{0} = 1$
>
> (3) $\binom{0}{0} = 1$

Bsp: $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 6 \qquad \binom{7}{3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \qquad \binom{5}{5} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \qquad \binom{5}{8} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)(-2)}{8!}$

Folgerung:
Satz 9.2

> $\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = 0 \quad (\text{wenn } n < k)$

Satz 9.3

> $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

Bew:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots k}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots k}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-k)+1)}{(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{(n-k)!}\cdot\frac{k!}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Satz 9.4

> Binominalsatz $\quad a,b\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\quad\Rightarrow$
>
> $$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\binom{n}{3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3+\ldots+b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$
>
> $$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

Bew: $(a+b)^n=(a+b)(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\binom{n}{3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3+\ldots$

(durch Induktion beweisbar)

Bsp:

$$n=2:\quad (a+b)^2=\binom{2}{0}a^2b^0+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}a^0b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$n=3:\quad (a+b)^3=\binom{3}{0}a^3b^0+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}a^0b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$n=4:\quad (a+b)^4=\binom{4}{0}a^4b^0+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}a^0b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$\Rightarrow$ Pascal’sche Dreieck

			1		2		1				$n=2$
		1		3		3		1			$n=3$
	1		4		6		4		1		$n=4$
1		5		10		10		5		1	$n=5$

$$(1+1)^n=2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{1^{n-k}\cdot 1^k}_{=1}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

$$(1-1)^n=0^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

9.3 Kombinationen

Def. 9.4

> Es sei M eine Menge mit Jede Teilmenge mit $k-$Elementen heißt Kombination Ordnung.

Bsp1: $M=\{1,2,3,4\}$

Kombinationen:

2. Ordnung: $(1,2)=(2,1),(1,3),(2,3),(2,4)$

3. Ordnung: $(1,2,3),(1,3,4),(1,2,4),(2,3,4)$

Bsp2: Lottokombinationen 6. Ordnung

Satz 9.4

> Eine Menge mit $n-$Elementen besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene Kombinationen mit $k-$ter Ordnung.

Bew: (1) man verteile die Elemente der Menge auf n Fächer $\underbrace{[\ ][\ ][\ ][\ ]}_{k}[\ ]\ldots[\ ]$

(2) in den $k-$markierten Fächer liegen die Elemente einer Kombination

(3) jede Permutation aller Fächer liefert Kombinationen in den ersten k Fächern $\Rightarrow$ $n!$ Kombinationen (?)

(4) berücksichtigen: Vertauschungen der markierten Fächer ergeben $\begin{cases}\text{neue Permutationen}\\ \text{keine neue Kombinationen}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{n!}{k!}$

(5) in den nicht markierten Fächern vertauschen $\Rightarrow$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$

Bsp1: Wieviele Möglichkeiten gibt es 6 aus 49 Kugeln zu ziehen?

$$\Rightarrow \binom{49}{6}=\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=13983815$$

Bsp2: Von 10 Mannschaften soll jede gegen jede spielen. Wieviele Möglichkeiten?

$$\Rightarrow \binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45$$

Bsp3: Bei einer Silvesterparty klingen 190x die Gläser. Wieviele Personen sind anwesend?

$$\Rightarrow \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=190 \quad\Rightarrow\quad n^2-n-380=0 \quad\Rightarrow\quad n_1=20$$

II FOLGEN UND REIHEN

1 Endliche Folgen

Def. 1.1

> Die Anordnung $x_1, x_2, x_3, \dots x_n \quad (x_j \in \mathbb{R})$ heißt "endliche Folgen" $(x_j = \text{Glieder})$

Bsp:
(1) 2,4,6,8,10,12
(2) -3,8,1,-256,15
(3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \frac{1}{1000}$
(4) $a_n = n^2$ für $n = 1, 2, 3, \dots 10 \quad \Leftrightarrow \quad 1, 4, 9, \dots 100$
(5) $x_j = \frac{j}{j+10}\left(1 - j^2\right) \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \,|\, 0 \,|\, -0{,}5 \,|\, -1{,}846 \,|\, -4{,}286$

Def. 1.2

> (1) Die Folge $a_1, a_2, \dots a_n$ mit $a_{j+1} - a_j = d$ für $j = 1, 2, \dots$ heißt "arithmetische Folge"
>
> (2) Die Folge $a_1, a_2, \dots a_n$ mit $\frac{a_{j+1}}{a_j} = q$ für $j = 1, 2, \dots$ heißt "geometrische Folge"

Bsp: arithmetische Folgen

$1, 3, 5, 7, 9, \dots 99 \quad (d = 2) \qquad -3, 2, 7, 12 \quad (d = 5) \qquad 100, 50, 0, -50, -100 \quad (d = -50) \qquad 2, 2, 2, 2, \dots 2 \quad (d = 0)$

geometrische Folgen

$2, 4, 8, 16, 32 \quad (q = 2) \qquad 5, -5, 5, -5, 5, -5 \quad (q = -1) \qquad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \frac{1}{729} \quad \left(q = \frac{1}{3}\right) \qquad 2, 2, 2, 2, \dots 2 \quad (q = 1)$

Satz 1.1

> $$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \dots n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

Bew: vollständige Induktion

gilt für $n = 1$: $\sum_{j=1}^{1} j = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \Rightarrow \quad$ OK

Induktionsannahme: richtig für $n = k$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^{k} j + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\Rightarrow$ richtig für $n = k+1 \quad (k = 1)(k \quad \Rightarrow \quad k+1)$

Satz 1.2

> Sei $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ eine arithmetische Folge
> dann gilt: (1) $a_j = a_1 + (j-1) \cdot d$
>
> (2) $\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Bew:

(1) $a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

$a_j = a_1 + (j-1) \cdot d$

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n}\left(a_1+(j-1)\cdot d\right) = \sum_{j=1}^{n} a_1 + \sum_{j=1}^{n}(j-1)\cdot d = \left(\underbrace{a_1+a_1+a_1+\ldots a_1}_{n-\text{mal}}\right) + d\left[\underbrace{1+2+3+\ldots(n-1)}_{\frac{(n-1)n}{2}}\right]$$

$$\underset{\text{Satz 1.1}}{=} n\cdot a_1 + d\,\frac{(n-1)n}{2} = \left(\frac{n}{2}\cdot a_1 + \frac{n}{2}\cdot a_1\right) + \frac{n}{2}\cdot d\,(n-1) = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + \underbrace{\left(a_1+(n-1)d\right)}_{a_n}\right] = \frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)$$

Bsp: zu (2): $5+10+15+20+\ldots 40 = \frac{8}{2}(5+40) = 180$

Die Summe aller geraden Zahlen von 1 bis 100: $2+4+6+8+\ldots 100 = \frac{50}{2}(2+100) = 2550$

Satz 1.3

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a^j = 1+a+a^2+a^3+\ldots a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (a\neq 1)}$$

Bew: $(1+a+a^2+a^3+\ldots a^n)(1-a) = (1+a+a^2+a^3+\ldots a^n) - a - a^2 - a^3 - \ldots a^n - a^{n+1} = 1-a^{n+1}$

$$\Rightarrow\quad 1+a+a^2+a^3+\ldots a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Satz 1.4

Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ eine geometrische Folge (mit q)
dann gilt für $q\neq 1$: (1) $a_j = a_1\cdot q^{j-1}$

(2) $\sum_{j=0}^{n} a_j = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

Bew:

(1) $a_2 = a_1\cdot q$

$a_3 = a_2\cdot q = a_1\cdot q^2$

$a_4 = a_3\cdot q = a_1\cdot q^3$

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_1\cdot q^{j-1} = a_1\cdot\sum_{j=1}^{n} q^{j-1} = a_1\left[1+q+q^2+q^3+\ldots q^{n-1}\right] \underset{\text{Satz 1.3}}{=} a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Bsp: 1000 DM werden mit 4% verzinst:
nach 1. Jahr $\Rightarrow$ $1000\cdot 1{,}04 = 1040$
nach 2. Jahr $\Rightarrow$ $(1000\cdot 1{,}04)\cdot 1{,}04 = 1000\cdot 1{,}04^2 = 1081{,}6$

Man zahle jährlich 1000 DM ein bei 4%. Wie hoch ist das Kapital nach 20 Jahren?
Endkapital $= E = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Einzahlung: } 1000\cdot 1{,}04^{20} \\ \text{2. Einzahlung: } 1000\cdot 1{,}04^{19} \\ \vdots \\ \text{20. Einzahlung: } 1000\cdot 1{,}04 \end{array}\right\} \Rightarrow\quad E = 1000\left[1{,}04+1{,}04^2+\ldots 1{,}04^{20}\right] = 1000\left[\frac{1-1{,}04^{20}}{1-1{,}04}\right] = 30\,969{,}20 \text{ DM}$$

2 Unendliche Folgen

Def. 2.1

> Eine Anordnung $x_1, x_2, x_3, \dots \ (x \in \mathbb{R})$ sind heißt "unendliche Folgen" oder "Folgen".
> Die x_j heißen Glieder der Folge.

Bsp:
(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
(2) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
(3) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$
(4) $a_j = \frac{1}{j^2} \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad \Rightarrow \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$

Satz 2.1

> Eine Folge entsteht, indem man jeder $\mathbb{N}$ eine $\mathbb{R}$ zuordnet

Bsp:

$$\left.\begin{array}{lcl} 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & \frac{1}{2} \\ 3 & \rightarrow & \frac{1}{3} \\ 4 & \rightarrow & \frac{1}{4} \end{array}\right\} = \text{Folge}$$

Darstellung einer Folge
(1) durch aufzählen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$
(2) durch eine Formel (Bsp4)

Bsp:
(5) $a_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad \Rightarrow \quad 1, -1, 1, -1, \dots$
(6) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad \Rightarrow \quad 1 \,|\, 2 \,|\, 2,5 \,|\, 2,75 \,|\, \dots$
(7) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad \Rightarrow \quad 2 \,|\, 2,25 \,|\, 2,37 \,|\, 2,44 \,|\, \dots$

3 Grenzwerte bei unendlichen Folgen

3.1 Definitionen

Bsp1: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{1000000} \quad \rightarrow \quad 0$ schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (0 = \text{Grenzwert})$

Bsp2: $a_n = \sqrt[n]{2} \quad (n = 1,2,3,4,5,\ldots) \quad \Rightarrow \quad 2\,|\,1{,}41\,|\,1{,}26\,|\,1{,}19\,|\,1{,}15\,|\ldots \qquad a_{20} = 1{,}04 \qquad a_{100} = 1{,}007 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

Schreibweisen:
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \quad (\text{Limes von } a_n)$
(2) $a_n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$
(3) a_n konvergiert gegen 1 für n gegen unendlich

Bsp3: $x_n = \frac{2n+1}{n} \quad (n = 1,2,3,4,\ldots) \quad \Rightarrow \quad 3\,|\,2{,}5\,|\,2{,}33\,|\,2{,}25\,|\ldots|\,2{,}01\,|\ldots \qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

Def. 3.1

(1) Eine Folge $a_n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$ hat $x \in \mathbb{R}$ als Grenzwert,
falls bei wachsendem n die Glieder an der Folge sich der Zahl x beliebig annähern.
symbolisch: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \qquad (\text{die Folge } a_n \text{ ist konvergent; } x = \text{Grenzwert})$

(2) exakter: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \quad \Leftrightarrow$ nach Vorgabe einer beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$,
gibt es eine natür. Zahl n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $|\,a_n - x\,| < \varepsilon$

Bsp: $a_n = \frac{1-3n^3}{n^3} \quad \Rightarrow \quad -2\,|\,-2{,}875\,|\,-2{,}9629\,|\ldots \quad \rightarrow \quad -3$

Def. 3.2

(1) Eine Folge die gegen keine Zahl konvergiert heißt divergent
(2) Eine Folge die gegen Null konvergiert heißt Nullfolge

Bsp:

$1\,|\,-1\,|\,1\,|\,-1\,|\,1\,|\,-1\,|\ldots$ divergent

$1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\ldots$ konvergent

$a_n = n^2 \quad \Rightarrow \quad 1\,|\,4\,|\,9\,|\,16\,|\,25\,|\ldots$ divergent

$a_n = \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,|\,\frac{1}{4}\,|\,\frac{1}{8}\,|\,\frac{1}{16}\,|\ldots$ Nullfolge

Def. 3.3

x_n wird beliebig groß $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

$\left.\begin{array}{l} |\,x_n| \text{ wird beliebig groß} \\ \text{und } x_n < 0 \text{ für } n \geq n_0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{n} = \infty \qquad 2\,|\,2{,}5\,|\,3{,}3\,|\ldots|\,100{,}01\,|\ldots$

3.2 Berechnung von Grenzwerten (Beispiele)

(1) $U_n = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1} \quad \rightarrow \quad 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$

(2) $a_k = \frac{k^2}{(k+1)^2} = \frac{k^2}{k^2+2k+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}} \quad \rightarrow \quad 1 \qquad (k \rightarrow \infty)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3{,}8n^2-2{,}5n+7{,}6}{1{,}8n^2-2n+9{,}6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3{,}8-\dfrac{2{,}5}{n}+\dfrac{7{,}6}{n^2}}{1{,}8-\dfrac{2}{n}+\dfrac{9{,}6}{n^2}} = \dfrac{3{,}8}{1{,}8} = 2{,}111$

(4) $\dfrac{3n^2-1}{n} = 3n - \dfrac{1}{n} \quad \to \quad \infty \quad (n\to\infty)$

(5) $a_n = q^n \quad \text{mit } |q|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(6) $a_n = \sum\limits_{j=0}^{n} q^j = 1+q+q^2+q^3+\ldots q^n \quad (|q|<1)$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 1+q \\ a_2 = 1+q+q^2 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \to \quad \frac{1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1}{1-q}$$

(7) $\dfrac{1-0{,}5^n+n^2}{1+n^2} = \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{0{,}5^2}{n^2}+1}{\dfrac{1}{n^2}+1} \quad \to \quad 1$

(8) $\sqrt[n]{a} \quad \to \quad ? \quad (a\geq 0) \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} \quad \to \quad a^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a \geq 0)$

(9) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1,2,3,\ldots 10,\ldots) \qquad 2\,|\,2{,}25\,|\,2{,}37\,|\ldots|\,2{,}59\,|\ldots \qquad \to \quad ?$

3.3 Die Zahl e

3.3.1 Der Grenzwert von $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Satz 3.1

$$\boxed{\text{Für alle } n \text{ gilt: } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3}$$

Bew: Binomialsatz: (I, Satz 9.4)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \binom{n}{3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + \binom{n}{n}\cdot a^0 \cdot b^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots k} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}_{<1} < 3$$

Satz 3.2

$$\boxed{\text{Die Folge } a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ist wachsend, d.h. } a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots}$$

Bew: $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

zeigen: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$

Bernoullische Ungleichung (I, Satz 8.1): $(1+a)^n > 1+n\cdot a$

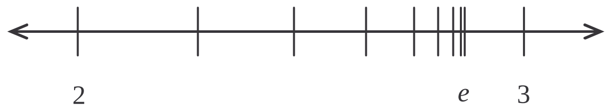
$$a=-\frac{1}{n^2}\;\Rightarrow\;\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n}\;\Rightarrow\;\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}\;\Rightarrow\;\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}\;\Rightarrow\;\frac{(n-1)^n(n+1)^n}{n^{2n}}>1-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\;\frac{(n+1)^n}{n^n}>\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n^n}{(n-1)^n}\;\Rightarrow\;\frac{(n+1)^n}{n^n}>\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\;\Rightarrow\;\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=a_n>a_{n-1}$$

Satz 3.3

$$\boxed{\text{Die Folge } a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ hat eine Grenzwert } e \text{ mit } 2<e<3}$$

Bew: $a_1=2<a_2<a_3<a_4<\ldots 3$



$\Rightarrow\; 2<e<3$

Satz 3.4

$$\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,7182818\ldots\quad(\text{irrational})}$$

Berechnung: $a_1=2\,|\,a_2=2,25\,|\,a_{100}=2,70481383\,|\,a_{10000}=2,718145936\,|\ldots$

Satz 3.5

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^{\alpha}}$$

Bew: $$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{\alpha}\cdot\alpha}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\alpha}=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\right]^{\alpha}\;\underset{\substack{n\to\infty\\(2\to\infty)}}{\to}\;e^{\alpha}$$

3.3.2 Stetige Verzinsung

Bsp1: (1) 100€ sind 1 Jahr lang mit 6% zu verzinsen

$$\text{Endkapital}=E=100€\cdot1,06=100€\cdot\left(1+\frac{0,06}{1}\right)^1=106€$$

(2) 100€ 2mal ½ Jahr mit 3%

$$E=(100€\cdot1,03)\cdot1,03=100€\cdot1,03^2=100€\cdot\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^2=106,14€$$

(3) 100€ 4mal (1,5%)

$$E=100€\cdot1,015^4=100€\cdot\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^4=106,14€$$

(4) tägliche Verzinsung

$$E=100€\cdot\left(1+\frac{0,06}{365}\right)^{365}=106,18€$$

(5) stetige Verzinsung

$$E=100€\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,06}{n}\right)^n\right)=100€\cdot e^{0,06}=106,184€$$

Bsp2: Wachstum einer Bakterienkultur

N_0 = Anzahl der Bakterien zur Zeit $t=0$

N = Anzahl der Bakterien zur Zeit t

$N=N_0e^{\alpha t}$

Bsp3: Radioaktiver Zerfall

M = Masse U_{235}

$M=M_0e^{-\alpha t}$

4 Reihen

Bsp1: Folge: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Def. 4.1

> Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Folge $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j =$ Reihe

Bsp2: $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$

Teilsumme: $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots \left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{\text{Satz 1.3}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1,5$

Def. 4.2

> Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine Reihe
>
> (1) Wenn die Teilfolge der Teilsumme $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ für $n \to \infty$ gegen die Zahl α konvergiert, heißt α der Wert der Reihe und es gilt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \alpha$
>
> (2) Wenn $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ einen Wert besitzt, heißt die Reihe konvergent, andernfalls divergent

Bsp3: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$

Bsp4: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$

Fall 1: $q = 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} 1^j = 1+1+1+1+\ldots = \infty$ divergent

Fall 2: $|q| < 1 \Rightarrow$ Teilsumme: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1+q} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-q} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$

Fall 3:

$q = -1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^j = 1 + (-1) + 1 + \ldots$ Folge der Teilsumme: $1,0,1,0,\ldots$ nicht konvergent $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^j =$ divergent

Fall 4: $|q| > 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^j =$ divergent

Folgerung:
Satz 4.1

> $|q| < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$

Bsp5: $\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^j = \frac{1}{1+\frac{1}{10}} = 1,111$

Bsp6: $\sum_{j=3}^{\infty} 10^{-j} = \sum_{j=3}^{\infty} 10^{-j} - \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\right) = 0,00111$

Def. 4.3

$$\boxed{\text{Sei } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ divergent und } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \to \pm\infty \text{ für } n \to \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \pm\infty}$$

Bsp7: Harmonische Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{\frac{1}{2}}$$

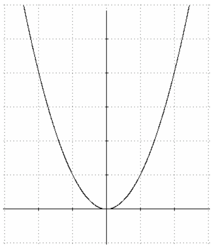
$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty$$

III FUNKTIONEN

1 Grundlagen

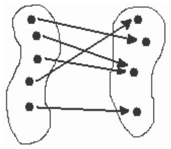
Bsp1: $y = x^2$



$x \rightarrow y$

Zuordnung: $x \rightarrow y$

Bsp2: Zuordnung Menge1 Menge2



M N

Def. 1.1

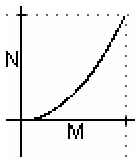
(1)	Es seien M und N zwei Zahlenmengen. Jeden $x \in M$ werde eindeutig ein $y \in N$ zugeordnet. Eine Zuordnung dieser Art heißt Funktion.
	Schreibweise: $y = f(x)$ oder $y = g(x)$ oder $y = x^2$
(2)	M = Definitonsbereich der Funktion
	$x \in M$ = Argument oder unabhängige Variable der Funktion
	N = Wertebereich der Funktion
	$y \in N$ = abhängige Variable oder Funktionswert

Beispiele

(1)

$y = x^2$ für $M = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ (Definitionsbereich)

$N = \{y \mid 0 \le y \le 1\}$ (Wertebereich)



Zuordnungen $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$

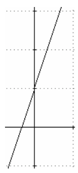
$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{8}$

$1 \rightarrow 1$

(2)

$y = 3x + 1$ für $x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ = Def.bereich



Zuordnungen $1 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 7$

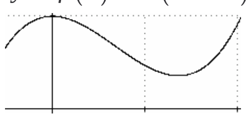
$-1 \rightarrow -2$

(3) $M = \{0,1,2,3\}$ = Def.bereich

$N = \{13,14,15\}$ = Wertebereich

Zuordnungen
$$\left.\begin{array}{l} 0 \rightarrow 13 \\ 1 \rightarrow 14 \\ 2 \rightarrow 15 \\ 3 \rightarrow 15 \end{array}\right\} \text{Funktion}$$

(4) $y = f(x)$ $(x \in M)$



(5)

x	0	1	2	3
y	4	5	1	3

$x \rightarrow y$

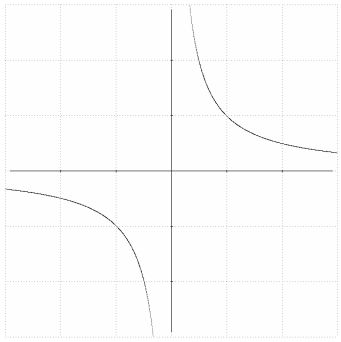
Darstellung einer Funktion

1 Gleichung: $y = f(x)$ oder $y = x^2$ usw.

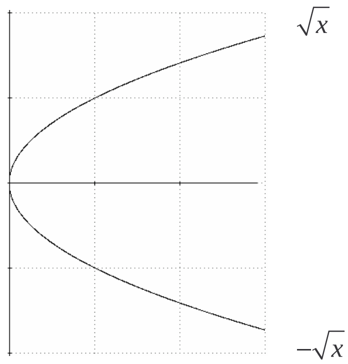
2 Tabelle

3 graphisch (Kurve)

(6) $y = \dfrac{1}{x}$ $\quad M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ = Def.bereich



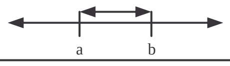
(7) $y = \sqrt{x}$ $\quad M = \{x \mid x \geq 0\}$



Def. 1.2

(1) $\{x \mid a \leq x \leq b\} = [a,b]$ = abgeschlossenes Intervall

(2) $\{x \mid a < x < b\} = (a,b) =]a,b[$ = offenes Intervall



2 Polynome (ganzrationale Funktionen)

2.1 Definition

Def. 2.1

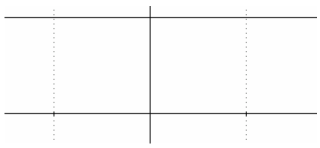
> Eine Funktion $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ $\left(\forall\ j;\ a_j \text{ Koeffizient}\right)$
> heißt $n-$ten Grades oder ganzrationale Funktion. n heißt der Grad des Polynom

Beispiele: $y = 3x^2 - 2x + 1$ $\left(\text{Grad } 2\right)$ $\qquad$ $y = 3{,}8x^4 - 2{,}2x^2$ $\left(\text{Grad } 4\right)$

$y = \left(x-3\right)\left(x-4\right) + x^7 = x^7 + x^2 - 7x + 12$ $\left(\text{Grad } 7\right)$

Operationen: $+ \mid - \mid \cdot$

Polynom $0-$ten Grades: $y = a_0$



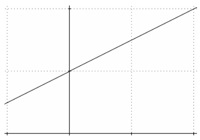
2.2 Polynome 1. Grades

Def. 2.2

> Ein Polynom $1-$ten Grades $y = ax + b$ heißt Lineare Funktion oder Gerade

Bsp: $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

x	0	1	2
y	1	1,5	2



Def. 2.3

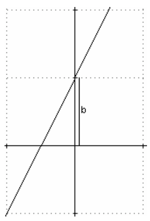
> Seien $\left(x_1, y_1\right)$ und $\left(x_2, y_2\right)$ zwei Punkte einer Geraden.
> Dann heißt $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ Steigung der Geraden

Satz 2.1

> Bei der Geraden $y = ax + b$ ist a die Steigung und b der Durchgang der Geraden durch die $y-$Achse.

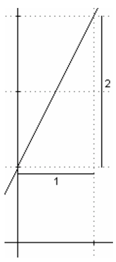
Bew: (1) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\left(ax_2 + b\right) - \left(ax_1 + b\right)}{x_2 - x_1} = \dfrac{a\left(x_2 - x_1\right)}{x_2 - x_1} = a$

(2) $y = ax + b$



Konstruktion einer Geraden

$y = 2x + 1$



Satz 2.2

> Zweipunktformel
> Gegeben seien die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) des Koordinatensystems. Dann geht die Gerade
> $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ durch diese Punkte

Bew: $y_2 - y_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} \cdot (x_2 - x_1)$ $\quad (x_1, y_1)$ und (x_2, y_2) erfüllen die Gleichung $\Rightarrow$ liegen auf der Geraden

Bsp: Welche Gerade geht durch die Punkte $(1,2)(-1,0)$

$$\frac{0-2}{-1-1} = \frac{y-2}{x-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{y-2}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y - 2 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1$$

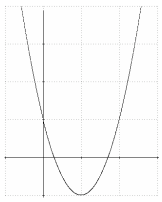
2.3 Polynome 2. Grades (Parabel)

Def. 2.4

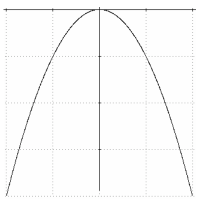
> Die Funktion $y = ax^2 + bx + c$ heißt Parabel

Bsp1: $y = 2x^2 - 4x + 1$

x	-1	0	1	2	3
y	7	1	-1	1	7



Bsp2: $y = -x^2$



Satz 2.3

> Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ist nach oben oder nach unten geöffnet (entsprechend Abb), je nachdem ob $a < 0$ oder $a > 0$ ist

Bew: $y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = a(x - x_0)^2 \quad$ mit $x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = c - \frac{b}{4a^2}$

$y - y_0 = y' = a(x - x_0)^2 = ax'^2 \qquad y' = ax'^2 \quad \Rightarrow \quad a > 0$ oben

$a < 0$ unten

Def. 2.5

> Koordinatentransformation
> Eine Koordinatentransformation ist die Einführung neuer Koordinaten (x', y'),
> so dass die Funktion $y = f(x)$ in die Funktion $y' = g(x')$ übergeht.

(vgl. Bew zu Satz 2.3)

2.4 Division zweier Polynome

$(x^3 - 2x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = ?$

Bsp1:

$$\begin{array}{l} 122 : 5 = 24 + \frac{2}{5} \\ \underline{10} \\ \ 22 \\ \ \underline{20} \\ \ \ 2 \end{array}$$

Bsp2:

$$\begin{array}{l} (x^2 - 3x + 1) : (x - 1) = x - 2 + \frac{-1}{x-1} \\ \underline{x^2 - x} \\ \quad -2x + 1 \\ \quad \underline{-2x + 2} \\ \qquad -1 \end{array}$$

Bsp3:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 5x^2 - 1) : (x^2 + x + 1) = x - 6 + \frac{5x+7}{x^2+x+1} \\ \underline{x^3 + x^2 + x} \\ \quad -6x^2 - x + 1 \\ \quad \underline{-6x^2 - 6x - 6} \\ \qquad 5x + 7 \end{array}$$

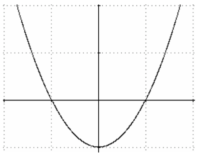
Bsp4: $$\begin{array}{l} (x^2-4x+4):(x-2)=x-2 \\ \underline{x^2-2x} \\ \quad -2x+4 \\ \quad \underline{-2x+4} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

2.5 Die Nullstellen eines Polynoms

Def. 2.6

$$\boxed{\text{Jeder Wert } x_0,\text{ für } f(x_0)=0 \text{ heißt Nullstelle der Funktion } f(x)}$$

Bsp1: $y=x^2-1$



Nullstellen = Durchgang durch $x-$Achse

Bsp2: $x^2+px+q=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

Fall1: $\frac{p^2}{4}-q>0 \quad\Rightarrow\quad$ 2 Nullstellen (reell)

Fall2: $\frac{p^2}{4}-q<0 \quad\Rightarrow\quad$ 1 Nullstellen

Fall3: $\frac{p^2}{4}-q=0 \quad\Rightarrow\quad z$ und $\overline{z}$ komplexe Nullstelle

Bsp3: $x^2-2x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=1\pm\sqrt{1-2}=1+j$

Satz 2.4

> Fundamentalsatz der Algebra
> Sei $P_n(x)=$ Polynom von Grad n, dann gilt die Darstellung:
> $P_n(x)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \quad (x_j = \text{reell oder komplex})$

d.h.: $x^3-9x=(x-0)\cdot(x-3)\cdot(x-(-3))$ (Faktorzerlegung)

Bew: Hilfssatz1: $P_n(x)=$ Polynom von Grad $n \quad\Rightarrow\quad P_n(x)=P_{n-1}(x)\cdot(x-a)+P_n(a)$

Bew: $P_n(x):(x-a)=P_{n-1}(x)+\frac{r}{x-a} \quad\Rightarrow\quad P_n(x)=P_{n-1}(x)\cdot(x-a)+r \qquad |\, x=a$

$$P_n(a)=P_{n-1}(a)\cdot(a-a)+r=r$$

Hilfssatz2: $P_n(x)=$ Polynom von Grad n $\quad a=$ Nullstelle von $P_n(x) \quad\Rightarrow\quad P_n(x)=P_{n-1}(x)\cdot(x-a)$

Bew: HS $\Rightarrow$ $P_n(x)=P_{n-1}(x):(x-a)+P_n(a)$ $\qquad a$ Nullstelle $\Rightarrow$ $P_n(a)=0$

Satz 2.4:

x_1 Nullstelle von $P_n(x)$

HS2 $\Rightarrow$ $P_n(x)=P_{n-1}(x)\cdot(x-x_1)$

$\Rightarrow$ $P_n=P_{n-1}(x-x_1)$

x_2 Nullstelle von P_n $\Rightarrow$ x_2 Nullstelle von P_{n-1}

HS2 $\Rightarrow$ $P_{n-1}=P_{n-2}(x-x_2)$

einsetzen: $P_n=P_{n-2}(x-x_2)(x-x_1)$

x_3 Nullstelle von P_n $\Rightarrow$ x_3 Nullstelle von P_{n-2}

$P_{n-2}=P_{n-3}(x-x_3) \quad\Rightarrow\quad P_n=P_{n-3}(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$

usw.

schließlich: $P_n=\underset{P_0=a}{P_0}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\ldots(x-x_1)$

Bsp1: $x^4 + x^3 - x^2 + x - 3 = (x-1)(x-(-2))(x-j)(x-(-j)) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen $1|-2|\,j\,|-j$

Bsp2: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x + 8 = (x-(1+j))(x-(1-j))(x-2)(x-(-2))$

Bsp3: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$

Def. 2.7

(1)	Die Zerlegung eines Polynoms im Sinne von Satz 2.4 heißt Faktorzerlegung
(2)	Kommt eine Nullstelle in der Faktorzerlegung $k-$mal vor, heißt sie $k-$fache Nullstelle

Bsp4: $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \quad x = 2$ ist $2-$fache Nullstelle

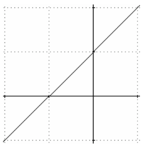
Satz 2.5

(1)	Zählt man jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit (d.h. bei $k-$facher Nullstelle $k-$mal), dann hat ein Polynom $n-$ten Grades genau $n-$Nullstellen
(2)	Ein Polynom $n-$ten Grades hat höchstens $n-$reelle Nullstellen (Schnittpunkte mit der $x-$Achse)

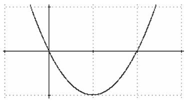
Bew: folgt aus Satz 2.4

Beispiele:

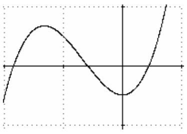
(1) $y = ax + b$ höchstens 1 Schnittpunkt



(2) $y = ax^2 + bx + c$ höchstens 2 Schnittpunkte



(3) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ höchstens 3 Schnittpunkte

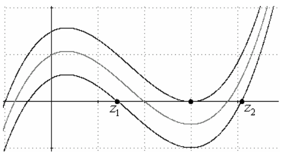


(4) $y = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$

$= a(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n)$

"Hochschieben" $\Rightarrow \quad z_1 \rightarrow z_2$

Faktorzerlegung: $y = a'(x-z)(x-z)(x-z_3)\ldots(x-z_{n'})$



(5) Polynom wie in (4) weiteres Hochschieben $\Rightarrow \quad z_1, z_2$ gehen in komplexe Nullstellen über

Faktorzerlegung: $y = a(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)\ldots(x-z_n) \qquad z_1, z_2$ komplex

beweisbar: $z_1 = \overline{z}_2$

Satz 2.6

(1)	Eine mehrfache reelle Nullstelle ist stets eine Berührstelle der Kurve mit der $x-$Achse
(2)	Ist $z = a + bj$ Nullstelle eines Polynoms, dann ist es auch der konjugiert komplexe Wert $\overline{z} = a - bj$

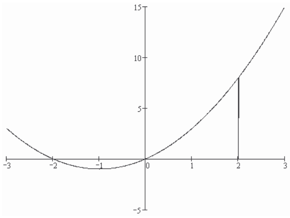
3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

3.1 Grenzwerte

Bsp1: $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3		15

Problem bei $x = 2$ $\quad x_j \to 2 \quad \Rightarrow \quad f\left(x_j\right) = y_j \to ?$

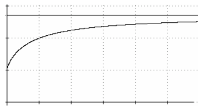


Def. 3.1

> Die Aussage: $\left[x_j \to a \text{ folgt } f\left(x_j\right) \to b \text{ für alle Folgen } x_j \to a\right]$
> ist identisch mit der Schreibweise: $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = b$

Fortsetzung Bsp1: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\left(x^2 - 4\right)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} x\left(x+2\right) = 8$

Bsp2: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e \qquad$ für $g\left(x\right) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} g\left(x\right) = e$

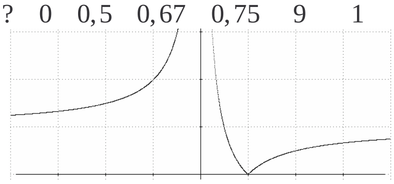


Bsp3: $f\left(x\right) = \dfrac{|x-1|}{|x|}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$0{,}1$	$0{,}5$
y	$1{,}25$	$1{,}33$	$1{,}5$	2	$?$	0	$0{,}5$	$0{,}67$	$0{,}75$	9	1

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x-1|}{|x|} = \lim_{x \to 0} \left|\frac{x-1}{x}\right| = \lim_{x \to 0} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = \infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x-1|}{|x|} = \lim_{x \to \pm\infty} \left|\frac{x-1}{x}\right| = \lim_{x \to \pm\infty} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = 1$$



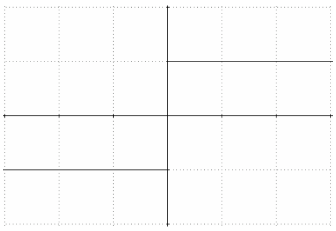
Asymptote bei: $x = 1$

Bsp4: Einseitiger Grenzwert

$$y = \frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{|x|} = 1$$

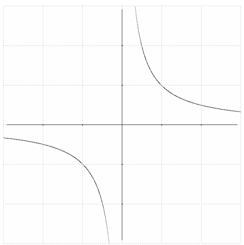
$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = -1$$



Bsp5: $y = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Def. 3.2

> $\left[x \to a \text{ mit } x > a\right] \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to a+} f\left(x\right) = A$
> $\left[x \to a \text{ mit } x < a\right] \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to a-} f\left(x\right) = B$

Def. 3.3

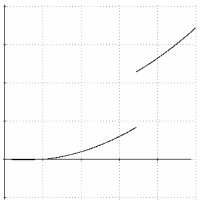
> geg: $\quad y = f\left(x\right) \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$
> (1) Die Menge der Punkte $\left(x, f\left(x\right)\right) = \left(x, y\right)$ im Koordinatensystem heißt Graph der Funktion (Kurve)
> (2) Nähert sich der Graph einer Funktion $x \to \infty$ $\left(x \to -\infty\right)$ dem Graphen einer Geraden,
> heißt die Gerade Asymptote (vgl. Bsp3)

3.2 Stetigkeit einer Funktion

Def. 3.4

(1)	Eine Funktion $y=f(x)$ heißt in x_0 stetig, falls $y=f(x_0)$ definiert ist und $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(x_0)$ ist
(2)	Eine Funktion heißt in einem Intervall stetig, falls sie für alle x_0 aus dem Intervall stetig ist

Bsp1: $y=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \text{ für } x\neq 0 \\ 0 \text{ für } x=0 \end{cases}$ in $x=0$ unstetig sonst stetig

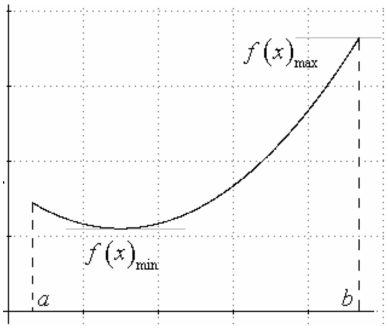
Bsp2:  unstetig

Merkregel: Eine Funktion mit Sprüngen, ist an den Sprungstellen nicht stetig

Satz 3.1

Sei $y=f(x)$ im Intervall $a\leq x\leq b$ stetig
$\Rightarrow$ y nimmt alle Werte zwischen ihrem Minimum und ihrem Maximum an

d.h:



4 Gebrochenrationale Funktionen

Def. 4.1

Jede Funktion $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind, heißt gebrochen rational

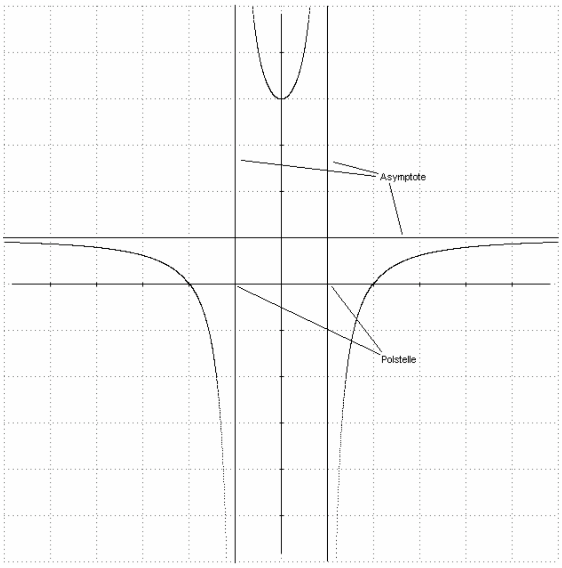
Bsp1: $y = \frac{x-1}{x^2+3}$

Bsp2: $y = \frac{x^2-3x+1}{1-x}$

Bsp3: $y = \frac{1}{x}$

Bsp4: $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$

x	$-2,5$	-5	$-1,5$	$-1,1$	$-1,0$	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,1$	$1,5$	2	$2,5$
y	$0,4$	0	$-1,4$	$-13,3$	$?$	5	4	5	$?$	$-13,3$	$-1,4$	0	$0,4$



$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2-4}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2-4}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$\infty -$Stelle $\Rightarrow$ Nullstelle des Nenners
$0-$Stelle $\Rightarrow$ Nullstelle des Zählers

Def. 4.2

Ist $f(x)$ bei $x = x_0$ nicht definiert, gilt aber $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, dann heißt x_0 Pol der Funktion $f(x)$

Satz 4.1

Sei $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gebrochen rationale Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$

(1) Ist x_0 Nullstelle von $P(x)$ und keine Nullstelle von $Q(x)$, dann ist x_0 Nullstelle von y

(2) Ist x_0 Nullstelle von $Q(x)$ und keine Nullstelle von $P(x)$, dann ist x_0 Pol von y

(3) Ist x_0 Nullstelle von $Q(x)$ und $P(x)$, dann hat y bei x_0 eine Lücke

5 Nichtrationale Funktionen (Kegelschnitte)

Anmerkung:	Polynom:	endlich oft:	$+ \mid - \mid \cdot$
	gebrochen rational:	endlich oft:	$+ \mid - \mid \cdot \mid /$
	nichtrational:	endlich oft:	$+ \mid - \mid \cdot \mid / \mid \sqrt{\ }$

Bsp1: $y=\sqrt{x}$ $\qquad y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3+7x}}$

Bsp2: $y=a\pm\sqrt{Ax^2+Bx+C} \quad\Rightarrow\quad (y-a)^2=Ax^2+Bx+C \quad\Rightarrow\quad y^2-2ay+a^2-Ax^2-Bx-C=0$

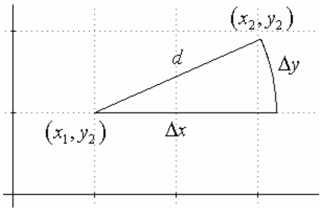
(Gleichung der Kegelschnitte)

5.1 Der Kreis

Def. 5.1

> Abstandsformel
> Sei (x_1,y_2) und (x_2,y_2) zwei Punkte im Koordinatensystem,
> dann heißt $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ Abstand der Punkte

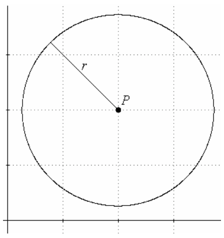
d.h.



Def. 5.2

> Alle Punkte die von einem Punkt (Mittelpunkt P) den gleichen Abstand r haben, bilden einen Kreis mit dem Radius r um P

Bsp:



Abstand $= d = (x,y)$ zu (a,b) ist r

$$d=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Satz 5.1

> (1) Die Gleichung eines Kreises $P=(a,b)$ mit dem Radius r lautet $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
> (2) Die Gleichung eines Kreises um den Nullpunkt lautet $x^2+y^2=r^2$
> (3) $x^2+y^2=1 \quad\Rightarrow\quad$ Einheitskreis

Beispiele:

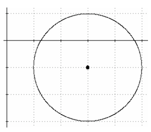
(1) Kreis um $(1,1)$ mit $r=2 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+(y-1)^2=4$

(2) Kreis um $(0,-4)$ mit $r=14 \Rightarrow \quad x^2+(y+4)^2=1$

(3) Die Gleichung $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ ist ein Kreis. Man zeichne ihn.

$x^2-6x+9+y^2+2y+1=-6+9+1$

$(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$



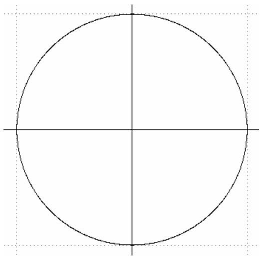
(4) Wo schneidet der Kreis $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ die:

$y-$Achse? $\quad (0-1)^2+(y+1)^2=4 \quad\Rightarrow\quad (y+1)^2=3 \quad\Rightarrow\quad y=-1\pm\sqrt{3}$

$x-$Achse? $\quad (x-1)^2+(0+1)^2=4 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2=3 \quad\Rightarrow\quad x=1\pm\sqrt{3}$

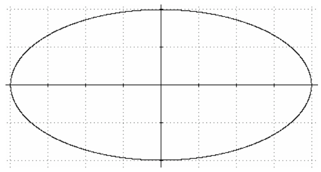
5.2 Ellipse

$x^2+y^2=1$



Kreis ausbeulen:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4x' \\ y &= 2y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x' &= \frac{x}{4} \\ y' &= \frac{y}{2} \end{aligned}$$

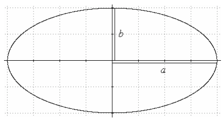


$$x^2+y^2=1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Def. 5.3

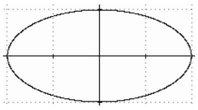
Ellipse um Nullpunkt

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,b)=$ Achsen der Ellipse

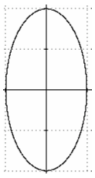


Beispiele:

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$



(2) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$



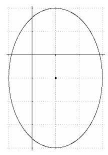
(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=3^2 \qquad$ (Kreis)

Def. 5.4

Ellipse um $P=(x_0,y_0)$ mit den Achsen a,b: $\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Beispiele:

(1) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1 \qquad$ Mittelpunkt $(1|-1) \qquad$ Achsen $(2|3)$



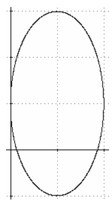
(2) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{3}=4 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{12}=1 \qquad$ Achsen $(\sqrt{8}\,|\,\sqrt{12})$

(3) $y^2+4x^2-2y-8x+1=0 \qquad$ Ellipse

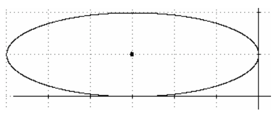
$4x^2-8x+y^2-2y=-1 \qquad$ Lage?

$4\left(x^2-2x+1\right)+y^2-2y+1=-1+4+1$

$4(x-1)^2+(y-1)^2=4 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$



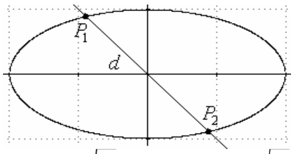
(4) Ellipse:



Gleichung? $\qquad$ Achsen $(3|1) \qquad$ Mittelpunkt $(-3|1)$

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

(5) Wie lang ist die Sehne für die Gerade $y=-x$ aus der Ellipse $x^2+4y^2-4=0$ ausgeschnitten?



$x^2+4y^2=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

Schnittpunkte P_1, P_2 :

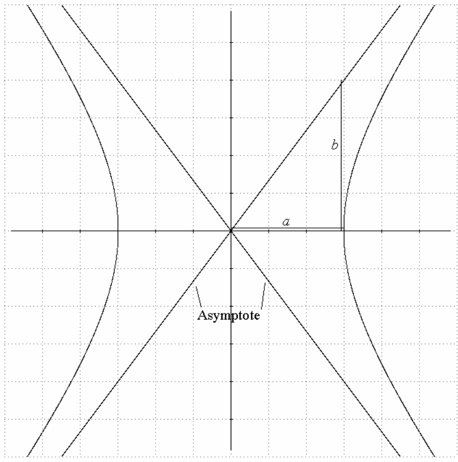
$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\\ y=-x\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{(-x)^2}{1}=1 \;\Rightarrow\; x^2+4x^2=4 \;\Rightarrow\; 5x^2=4 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{4}{5}} \;\Rightarrow\; y=\mp\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$(P_1 \mid P_2):\ \left(\sqrt{\frac{4}{5}} \mid -\sqrt{\frac{4}{5}}\right),\left(-\sqrt{\frac{4}{5}} \mid \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$

Abstand: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2}=\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2}=\sqrt{8\sqrt{\frac{4}{5}}^2}=\sqrt{\frac{32}{5}}=2{,}5298$

5.3 Hyperbel

Bsp:



$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{16}=\frac{x^2}{9}-1$

$\Rightarrow\quad \frac{y}{4}=\pm\sqrt{\frac{x^2}{9}-1} \quad\Rightarrow\quad y=\pm4\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$

x	–18	–15	–12	–9	–6	–3
y	±23,7	±19,6	±15,5	±11,3	±6,9	0

x	0	3	6	9	12	15
y	?	0	±6,9	11,3	15,5	19,6

Def. 5.5

(1) Hyperbel um Nullpunkt $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Hyperbel um $(x_0 \mid y_0)$

Satz 5.2

Die Geraden $y=\pm\frac{b}{a}x$ sind die Asymptoten an die Hyberbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Bew: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad y=\pm b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}-1}$

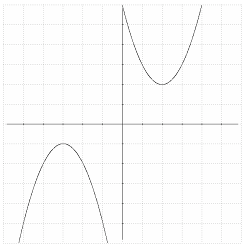
Verbindungsgerade: $y=\frac{y_1}{x_1}\cdot x=\pm\frac{1}{x_1}b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}-1}\cdot x=\pm\sqrt{\frac{x_1^2\cdot b^2}{a^2\cdot x_1^2}-\frac{b^2}{x_1^2}}\cdot x \underset{x_1\to\infty}{\longrightarrow} \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\cdot x=\pm\frac{b}{a}\cdot x=\text{Asymptote}$

Bsp: $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ Asymptote: $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x=\pm2x$

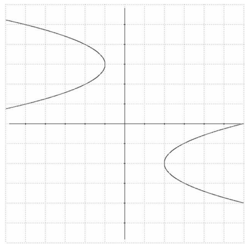
Nullstellen: $y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{2^2}-\frac{0}{4^2}=1 \quad\Rightarrow\quad x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm2$

5.4 Parabel

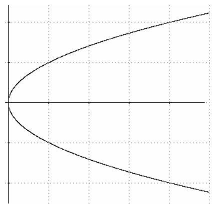
(1) $y = ax^2 + bx + c$



(2) $x = ay^2 + by + c$



Bsp: $y^2 = x \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x}$



5.5 Geometrie und Kegelschnitte

(a) Ellipse (Kreis)

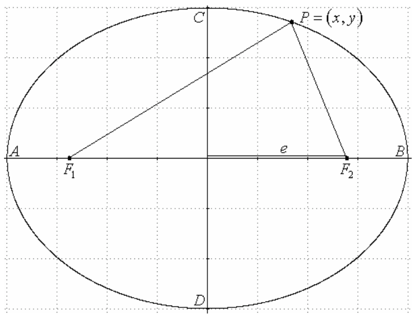
$A, B, C, D =$ Scheitelpunkte

$F_1, F_2 =$ Brennpunkte

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = 2a \\ \overline{CD} = 2b\end{array}\right\} \text{ Achsen}$$

$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} =$ konstant

$e^2 + b^2 = a^2$



Satz

> Die Ellipse ist die Menge aller Punkte P für die $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} =$ konstant ist

(b) Hyperbel

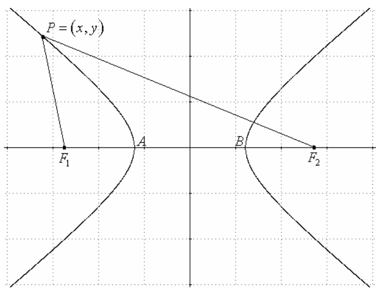
$A, B =$ Scheitelpunkte

$F_1, F_2 =$ Brennpunkte

$\overline{AB} = 2a$

$\overline{F_1F_2} = 2e$

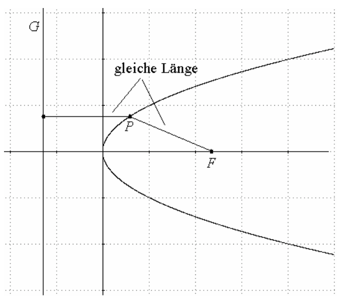
$b = \sqrt{e^2 - a^2} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = e^2$



Satz

> Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte P für die $\pm\left(\overline{F_1P} - \overline{PF_2}\right) = 2a =$ konstant ist

(c) Parabel



Satz

> Die Parabel ist die Menge aller Punkte P, deren Abstand von einem Punkt F (Brenpunkt) gleich dem Abstand von einer Graden G (Leitlinie) ist

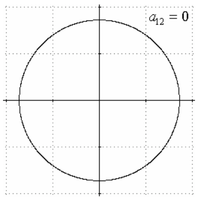
5.6 Die Gleichung der Kegelschnitte

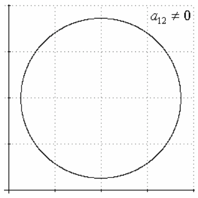
Die allgemeine Gleichung $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ stellt ein Kegelschnitt dar.

Bsp: $a_{11} = 1 \mid a_{12} = 0 \mid a_{22} = 2 \mid b_1 = b_2 = 0 \mid c = -4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ (Ellipse)

(1) $a_{12} = 0 \quad \Leftrightarrow$ die Achsen des Kegelschnitts sind den Koordinatenachsen parallel

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = D = \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow \text{ Ellipse (Kreis)} \\ < 0 & \Leftrightarrow \text{ Hyperbel} \\ = 0 & \Leftrightarrow \text{ Parabel} \end{cases}$$





Bsp: $3x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 2y + 9 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -13 < 0 \quad \Rightarrow$ Hyperbel

$y = \pm\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \pm 1 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ Hyperbel

6 Exponentialfunktion, Logarithmus

6.1 Exponentialfunktion

Def. 6.1

Die Funktion $y = a^x \quad (a > 0)$ heißt Exponentialfunktion. Sie beschreibt stetiges Wachstum.

$a = e \quad \Rightarrow \quad y = e^x = \exp(x)$

Bsp1: biologisches Wachstum (Bakterienkultur)

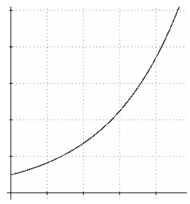
a_0 = Anfangsmenge

t = Zeit

$\alpha > 0$ Wachstumskoeffizient

$y(t)$ = Zahl der Bakterien zur Zeit t

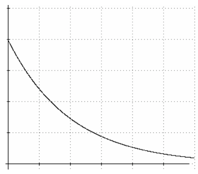
$$y(t) = a_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} \qquad (y(0) = a_0)$$



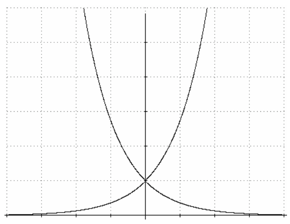
Bsp2: Radioaktiver Zerfall

$y(t)$ = Menge Uran zur Zeit t

$y(t) = a_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0$ Zerfallskonstante $\qquad a_0$ = Anfangsmenge$)$



Verlauf von $y = e^{\pm x}$



Satz 6.1

Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad \left[\Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\right]$$

Bew: I, Satz 9.4: $\quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \ldots + b^n$

$$e^x \underset{\text{II, Satz 3.5}}{=} \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{1}_{=a} + \underbrace{\frac{x}{n}}_{=b}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{x}{n} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \ldots\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1 + x + \frac{n(n-1)}{n \cdot n}\frac{x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot n \cdot n}\frac{x^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

6.2 Umkehrfunktion

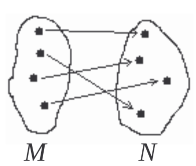
Funktion $f(x)$

Sei M = Definitionsbereich $\qquad N$ = Wertebereich

dann: $f(x)$ ordnet jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zu

d.h. $\quad f: M \underset{\text{überführt}}{\rightarrow} N \quad$ (eindeutig)

Bsp:

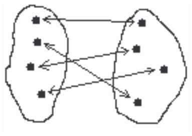


Def. 6.2

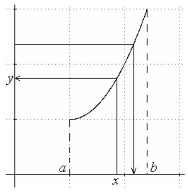
> Eine Funktion heißt eineindeutig oder umkehrbar (injektiv), falls durch die Funktion $y = f(x)$ jedem $x \in M$ eindeutig ein $y \in N$ zugeordnet wird und umgekehrt jedem $y \in N$ eindeutig ein $x \in M$

Beispiele

(1)

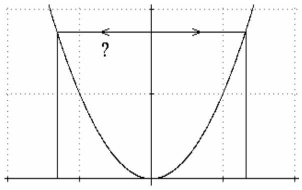


(2)



umkehrbar

(3)



$y = x^2$

nicht umkehrbar, weil die Rückführung nicht eindeutig ist

Sei $f(x)$ mit $x \in D, y \in W$

schreibweise $f : D \to W$ (wird überführt)

Annahme: Es gibt Umkehrfunktion (d.h. umkehrbar)

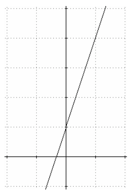
Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$

Def. 6.3

> Sei $f : D \to W$ umkehrbar, dann heißt die Funktion $f^{-1} : W \to D$ Umkehrfunktion zu f

Beispiele:

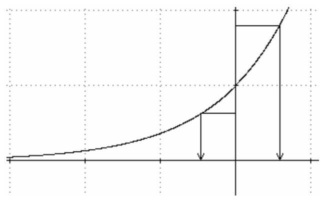
(1) $y = 3x + 1$



$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} y - \frac{1}{3} =$ Umkerhfunktion

(2) $y = +\sqrt{x} \quad (0 \le x \le \infty) \quad \Rightarrow \quad x = y^2 =$ Umkehrfunktion

(3) $y = e^x$



Es gibt Umkehrfunktion: $x = \ln y$

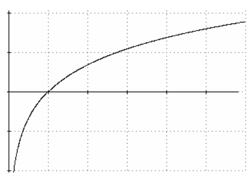
Def. 6.4

> $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y) \qquad$ (natürlicher Logarithmus)
> Definitionsbereich für $\ln(y) = \{y \mid y > 0\}$

Kurvenverlauf von $y = \ln x$

$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$

x	1	2,7	0,3
y	0	1	−1



Wichtige Logarithmen:

$x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x \qquad$ (natürlicher Logarithmus)

$x = 2^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \text{ld}\, x \qquad$ (Logarithmus dualis)

$x = 10^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log x \qquad$ (degatischer Logarithmus)

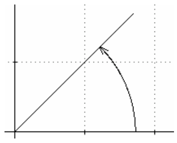
7 Die Trigonometrische Funktionen

7.1 Winkel

(a) Grad: Vollkreis $\hat{=}\ 360°$

$1° \hat{=} 60'$ (Min)

$1' \hat{=} 60''$ (Sek)



positiv $\Leftrightarrow$ gegen den Uhrzeigersinn

Bsp: $36°15'30'' = 36 + \frac{15}{60} + \frac{30}{3600} = 36{,}258°$

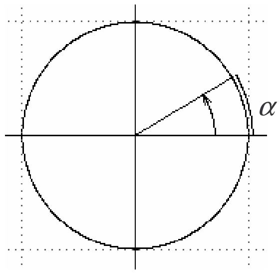
(b) Bogenmaß $\pi = 3{,}14159\ldots$

Vollkreis $\hat{=}\ 2\pi$

$\pi \hat{=} 180°$

$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90°$

$\frac{\pi}{4} \hat{=} 45°$

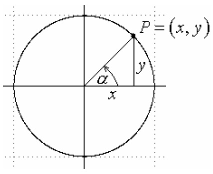


$\alpha(\text{Bog})$ $\quad x^2 + y^2 = 1$

(c) Neugrad $\left(\text{Vollkreis} \hat{=} 400°\right)$ $\quad$ (Geodaten)

7.2 Trigonometrische Funktionen

$x^2 + y^2 = 1$



Der Punkt P rotiere auf dem Einheitskreis

Zuordnung: $\alpha \to y \quad \Rightarrow \quad y = \sin\alpha$

$\alpha \to x \quad \Rightarrow \quad x = \cos\alpha$

Def. 7.1

> Sei $P = (x, y)$ ein Punkt des Einheitskreises und α der Winkel zwischen der x – Achse und der Strecke $\overline{0P}$ (Abb)
>
> $\Rightarrow \quad \sin\alpha = y$
>
> $\Rightarrow \quad \cos\alpha = x$
>
> $\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$
>
> $\Rightarrow \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}$

Beispiele:

$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \sin\pi = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

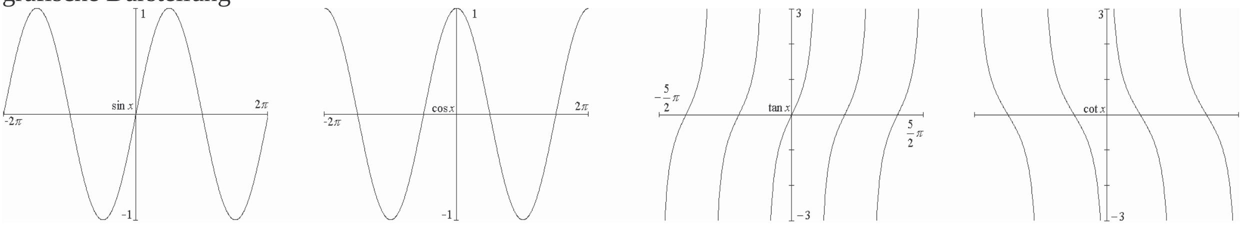
$\cos 0 = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \cos(6\pi) = 1 \qquad \sin 90° = 1$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(a^2 + a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Satz 7.1

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \tan(x + 2\pi) &= \tan x \\ \cot(x + 2\pi) &= \cot x \end{aligned}}$$

Bew: grafische Darstellung



Folgerung:

Satz 7.2

$$\cos x = \cos(-x) \qquad (\text{gerade Funktion})$$
$$\sin x = -\sin(-x) \qquad (\text{ungerade Funktion})$$
$$\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \qquad (\text{siehe Graph})$$

Satz 7.3

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\Rightarrow \quad \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow \quad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

Bew: Einheitskreis

Bsp: Man löse die Gleichung $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(-x)=0$

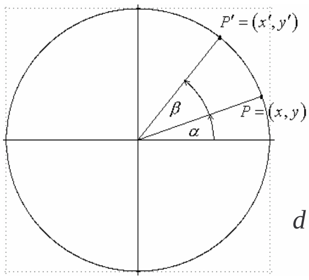
$$\Rightarrow \quad -\sin x + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \sin x \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

7.3 Additionstheorien der trigonometrischen Funktionen

Satz 7.4

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

Bew:



$P = (x \mid y)$ auf Einheitskreis gegeben

sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$\cos r \cdot x - \sin r \cdot y = x'$$
$$\sin r \cdot x + \cos r \cdot y = y'$$

$$d = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(\cos r \cdot x - \sin r \cdot y)^2 + (\sin r \cdot x + \cos r \cdot y)^2} = \text{umrechnen} = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

$P' = (x' \mid y')$ auf Einheitskreis

gilt: $P = (x \mid y) = (\cos\alpha \mid \sin\alpha)$

$$P' = (x' \mid y') = (\cos(\alpha+\beta) \mid \sin(\alpha+\beta))$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{cases} \cos r \cdot x - \sin r \cdot y = \cos(\alpha+\beta) \\ \sin r \cdot x + \cos r \cdot y = \sin(\alpha+\beta) \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos r \cdot \cos\alpha - \sin r \cdot \sin\alpha = \cos(\alpha+\beta) \\ \sin r \cdot \cos\alpha + \cos r \cdot \sin\alpha = \sin(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$\alpha = 0:$ $\quad \cos r \cdot \cos 0 - \sin r \cdot \sin 0 = \cos(\alpha+\beta) = \cos\beta$

$$\Rightarrow \quad \cos r = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad r = \beta \quad \Rightarrow \quad [\text{einsetzen} \quad \Rightarrow \quad \text{Satz 7.4}]$$

7.4 Trigonometrische Formeln

(a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\cdot\sin^2 x$

(b) $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

(c) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\cdot\tan y}$

(d) $1 - \cos x = 2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}$

(e) $\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y$

(f) $\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y$

Beweis:

(a) In Satz 7.4 $x = y$ setzen und $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

(b) In Satz 7.4 $x = y$ setzen

(c) $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y} = \dfrac{\dfrac{\sin x\cdot\cos y}{\cos x\cdot\cos y} + \dfrac{\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}} = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\cdot\tan y}$

(d) $\cos x \underset{(a)}{=} \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \left(1 - \sin^2\dfrac{x}{2}\right) - \sin^2\dfrac{x}{2} = 1 - 2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} = \text{(d)}$

(e), (f) $\Big\}$ in Satz 7.4 $\Rightarrow$ y durch $-y$ ersetzen

Bsp: Man löse die Gleichung $\sin x = \cos 2x$

$$\Rightarrow \sin x = 1 - 2\cdot\sin^2 x \underset{\sin x = u}{\Rightarrow} u = 1 - 2u^2 \Rightarrow u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \begin{cases} -1 \\ 0{,}5 \end{cases}$$

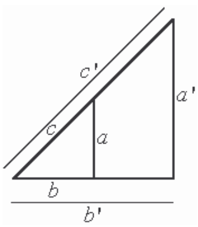
$\Rightarrow$ [1] $u = \sin x = -1 \Rightarrow x = 1{,}5\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ [2] $u = \sin x = 0{,}5 \Rightarrow x = 0{,}5235 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow x = (\pi - 0{,}5235) + 2k\pi$

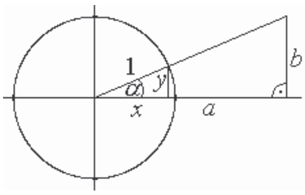
Trigonometrie und Geometrie

Strahlensatz:



$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

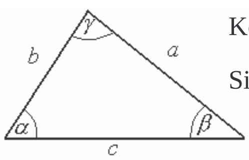
Folgerung:



$\sin\alpha = y = \dfrac{y}{1} = \dfrac{b}{c}$ $\qquad \cos\alpha = x = \dfrac{x}{1} = \dfrac{a}{c}$

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}$ $\qquad \cot\alpha = \dfrac{a}{b}$

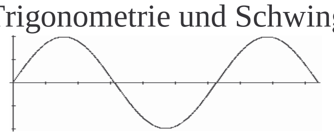
Kosinus- und Sinussatz:



Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Trigonometrie und Schwingungen

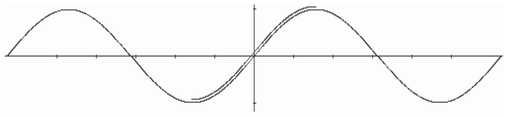


$y = A\cdot\sin(\omega\cdot t)$ $\qquad A =$ Amplitute

$\omega = 2\pi f$ $\qquad y =$ Elongation $\qquad \omega\cdot t =$ Phasenwinkel

7.5 Die Arcus-Funktion

$y = \sin x$



$$y = \sin x \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Def. 7.2

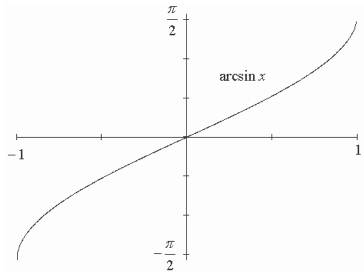
$$\boxed{y = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin y \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -1 \le y \le 1}$$

Beispiele:

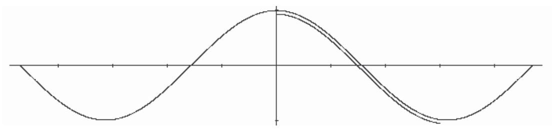
(1) $\arcsin(-1) = a \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

(2) $\arcsin(1) = a \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

(3) $\arcsin(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = 0$ $\qquad \arcsin(0) = 0$



$y = \cos x$



$$y = \cos x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi$$

Def. 7.3

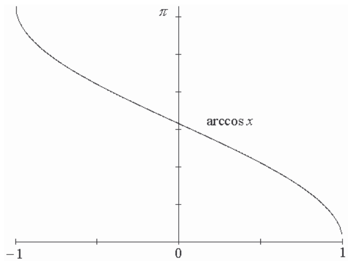
$$\boxed{y = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos y \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \quad \text{und} \quad -1 \le y \le 1}$$

Beispiele:

(1) $\arccos(-1) = a \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \cos a \quad \Rightarrow \quad a = \pi$ $\qquad \arccos(-1) = \pi$

(2) $\arccos(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cos a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

(3) $\arccos(1) = a \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \cos a \quad \Rightarrow \quad a = 0$ $\qquad \arccos(1) = 0$



Def. 7.4

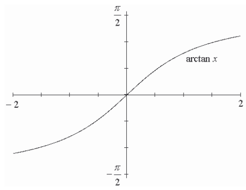
(1) $y = \tan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan y \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\infty < y < \infty$

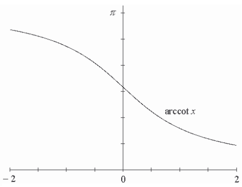
(2) $y = \cot x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arccot} y \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \quad \text{und} \quad -\infty < y < \infty$

Beispiele:

(1) $\arctan(1) = a \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \tan a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

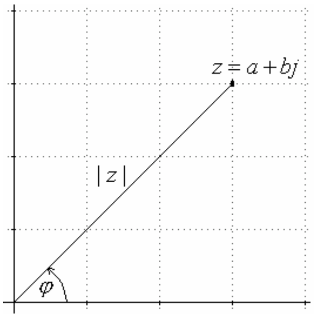
(2) $\operatorname{arccot}(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$





7.6 Trigonometrische Funktionen und komplexe Zahlen

7.6.1 Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen



$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \quad\Rightarrow\quad a = |z|\cdot\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} \quad\Rightarrow\quad b = |z|\cdot\sin\varphi$$

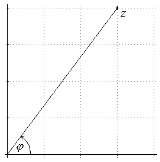
$$z = a + bj = |z|\cos\varphi + j\cdot|z|\sin\varphi$$

$$z = |z|\left(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi\right)$$

$\leftarrow$ trigonometrische Darstellung

$$\varphi = \underset{\text{Arcus}}{\operatorname{arc}}(z) = \underset{\text{Argument}}{\arg}(z)$$

Bsp1: $z = 3 + 4j$

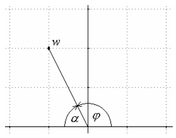


$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\tan\varphi = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \arctan\frac{4}{3} = 0{,}927$$

$$z = 5\left(\cos 0{,}927 + j\cdot\sin 0{,}927\right)$$

Bsp2: $w = -1 + 2j$



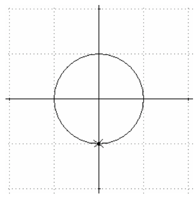
$$|w| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{1} \quad\Rightarrow\quad 63{,}4° = \alpha$$

$$\Rightarrow\quad \varphi = 180° - \alpha = 116{,}6°$$

$$w = \sqrt{5}\left(\cos 116{,}6° + j\cdot\sin 116{,}6°\right)$$

Bsp3: $z = -j$

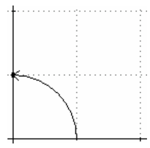


$$\varphi = 1{,}5\pi$$

$$-j = \cos(1{,}5\pi) + j\cdot\sin(1{,}5\pi)$$

$$\underset{\text{oder}}{=} \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

Bsp4: $j = \cos\dfrac{\pi}{2} + j\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}$



Bsp5: $4 = |4|\left(\cos 0 + j\cdot\sin 0\right)$

7.6.2 Exponentialdarstellung

$$z = |z|\left(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi\right) = |z|\cdot f(\varphi)$$

Satz 7.5

> für $z = |z|\left(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi\right) = |z|\cdot f(\varphi)$ gilt:
>
> (1) $f(0) = 1$
>
> (2) $f(\varphi+\psi) = f(\varphi)\cdot f(\psi)$
>
> (3) $\left(f(\varphi)\right)^n = f(n\varphi) \quad (n\in\mathbb{N})$

Bew: (1) $f(0) = \cos 0 + j\cdot\sin 0 = 1$

(2)
$$\begin{aligned} f(\varphi+\psi) &= \cos(\varphi+\psi) + j\cdot\sin(\varphi+\psi) \\ &= \left[\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi\right] + \left[\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi\right] \\ &= \left[\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi\right]\cdot\left[\cos\psi + j\cdot\sin\psi\right] = f(\varphi)\cdot f(\psi) \end{aligned}$$

(3) $\left(f(\varphi)\right)^n = ?$

$n = 2$: $\left(f(\varphi)\right)^2 = f(\varphi)\cdot f(\varphi) = f(\varphi+\varphi) = f(2\varphi)$

$n = 3$: $\left(f(\varphi)\right)^3 = f(\varphi)\cdot f(\varphi)\cdot f(\varphi) = f(2\varphi)\cdot f(\varphi) = f(2\varphi+\varphi) = f(3\varphi)$

Es gilt: $f(0)=1$ $\qquad e^{j0}=1$

$f(\varphi+\psi)=f(\varphi)\cdot f(\psi)$ $\qquad e^{j(\varphi+\psi)}=e^{j\varphi}\cdot e^{j\psi} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi+j\cdot\sin\varphi=e^{j\varphi}$

$\left(f(\varphi)\right)^n=f(n\varphi)$ $\qquad e^{j(n\varphi)}=\left(e^{j\varphi}\right)^n$

Def. 7.5

Euler`sche Formel
$e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi$

Satz 7.6

$e^{-j\varphi}=\cos\varphi-j\cdot\sin\varphi$

Bew: $e^{-j\varphi}=e^{j(-\varphi)}=\underbrace{\cos(-\varphi)}_{\cos\varphi}+j\cdot\underbrace{\sin(-\varphi)}_{-\sin\varphi}=\cos\varphi-j\cdot\sin\varphi$

Bsp: Herleitung des Additionstheorem $\qquad \cos(\alpha+\beta)=?$

$e^{j(\alpha+\beta)}=e^{j\alpha}e^{j\beta}=(\cos\alpha+j\cdot\sin\alpha)(\cos\beta+j\cdot\sin\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta+j(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta)$

$=\cos(\alpha+\beta)+j\cdot\sin(\alpha+\beta)$

Def. 7.6

Exponentialdarstellung
$z=|z|(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)=|z|\cdot e^{j\varphi}$

Bsp1: $z=-3+7j$

$|z|=\sqrt{3^2+7^2}=7,616$

$\tan\alpha=\frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad 66,8°=\alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi=180°-66,8°=113,2°$

$z=7,616(\cos 113,2°+j\cdot\sin 113,2°)=7,616\cdot e^{\underbrace{j\cdot 113,2°}_{=\text{Gradmaß}}}=7,616\cdot e^{\underbrace{j\cdot 1,975}_{=\text{Bogenmaß}}}$

Bsp2: $z=3e^{2j}$

$z=3(\cos 2+j\cdot\sin 2)=3(-0,416+j\cdot 0,909)=-1,248+j\cdot 2,727$

Bsp3: $w=1+0j$

$w=e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$

Bsp4: $z=1+3j$ $\qquad w=2-7j$

$|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}=3,162$ $\qquad |w|=\sqrt{2^2+7^2}=7,28$

$\tan\varphi=\frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad \varphi=1,25$ $\qquad \tan\tilde{\varphi}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varphi}=1,29 \quad \Rightarrow \quad \varphi=-1,29$

$z=3,162\cdot e^{j\cdot 1,25}$ $\qquad w=7,28\cdot e^{j(-1,29)}$

$\Rightarrow \quad \frac{z}{w}=\frac{3,162\cdot e^{j\cdot 1,25}}{7,28\cdot e^{j(-1,29)}}=\frac{3,162}{7,28}e^{j\cdot 1,25-(-1,29)}=0,43\cdot e^{j\cdot 2,54}$

Bsp5: Elektrotechnik: $z=3e^{j\cdot 30°}=3\underline{|30°}$ $\qquad (3\underline{|30°})\cdot(4\underline{|40°})=12\underline{|70°}$ $\qquad (3\underline{|30°}):(4\underline{|40°})=0,75\underline{|-10°}$

Satz 7.7

(1) $e^{j(\varphi+2\pi)}=e^{j\varphi}=e^{j(\varphi+2k\pi)} \quad (k\in\mathbb{Z})$

(2) $e^{j2\pi}=1$

(3) $e^{j\pi}=-1$

(4) $|e^{j\varphi}|=1 \quad (\text{für alle } \varphi\in\mathbb{R})$

Bew: (1) $e^{j(\varphi+2\pi)}=\cos(\varphi+2k\pi)+j\cdot\sin(\varphi+2k\pi)=\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi=e^{j\varphi}$

(2) $e^{j2\pi}=\cos(2\pi)+j\cdot\sin(2\pi)=1$

(3) $e^{j\pi}=\cos\pi+j\cdot\sin\pi=-1$

(4) $|e^{j\varphi}|=|\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\sqrt{1}=1$

Satz 7.8

Die Formeln von Moivre

sei $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$ und $w = |w| \cdot e^{j\psi} \quad \Rightarrow$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{j(\varphi+\psi)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{j(\varphi-\psi)}$$

$$z^n = |z|^n \; e^{jn\varphi}$$

Bsp: $\left(1+j\right)^{10} = \left(1+j\right)\cdot\left(1+j\right)\cdot\ldots\left(1+j\right)$

$$\Rightarrow \quad 1+j = \sqrt{2}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+j\right)^{10} = \sqrt{2}^{10}\cdot e^{j\cdot 10\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{10}\cdot e^{j\cdot 7{,}85} = 32\left(\cos 7{,}85 + j\cdot\sin 7{,}85\right) = 32\left(0{,}004 + j\cdot 0{,}999\right) \approx 32j$$

7.6.3 Wurzeln

Berechnung von $\sqrt[n]{z}$

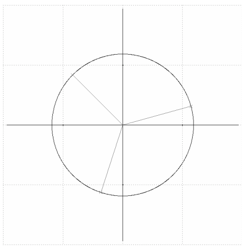
$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| \cdot e^{j(\varphi+2k\pi)} \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z| \cdot e^{j(\varphi+2k\pi)}} = \sqrt[n]{|z|}\cdot\sqrt[n]{e^{j(\varphi+2k\pi)}} = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left[e^{\frac{j(\varphi+2k\pi)}{n}}\right]$$

d.h. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{\frac{j(\varphi+2k\pi)}{n}} \quad \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$ Formel von Moivre

Bsp1: $\sqrt[3]{1+j} = ?$

$$|1+j| = \sqrt{2}\cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \qquad \sqrt[3]{1+j} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot e^{j\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$$



$$k = 0: \quad \sqrt[3]{1+j} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + j\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right) = 1{,}084 + j\cdot 0{,}291$$

$$k = 1: \quad \sqrt[3]{1+j} = \sqrt[6]{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -0{,}794 + j\cdot 0{,}794$$

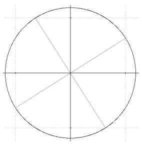
$$k = 2: \quad \sqrt[3]{1+j} = \sqrt[6]{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)\right] = -0{,}291 - j\cdot 1{,}084$$

Satz 7.9

Alle $n-$ten Wurzeln aus der komplexen Zahl z liegen in der Gausebene auf dem Kreis $r = \sqrt[n]{|z|}$ mit gleichen Winkelabständen $\frac{2\pi}{n}$

Folgerung: es gibt genau $n-$verschiedene Wurzeln

d.h. $\sqrt[4]{z}$



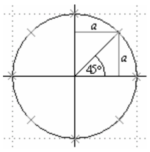
Bew: (1) $|\sqrt[n]{z}| = |\sqrt[n]{|z|}\cdot \underbrace{e^{j\cdot\alpha}}_{\text{Satz 7.7}\Rightarrow =1}| = \sqrt[n]{|z|} = r \quad \Rightarrow$ Kreis

(2) $\operatorname{arc}\left(\omega_k\right) = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$

$$\operatorname{arc}\left(\omega_{k-1}\right) = \frac{\varphi+2\left(k-1\right)\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\varphi}{n} - \frac{2\pi}{n} = \operatorname{arc}\left(\omega_k\right) - \frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arc}\left(\omega_k\right) - \operatorname{arc}\left(\omega_{k-1}\right) = \frac{2\pi}{n}$$

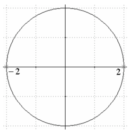
Bsp2: $\sqrt[8]{1}$



$$a^2 + a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

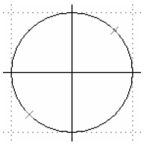
$$\sqrt[8]{1} = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm j \\ \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Bsp3: $\sqrt{4}$



$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Bsp4: $\sqrt{j}$



$$\sqrt{1} \cdot e^{j\left[\frac{\pi}{2}\right]\cdot\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{j} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

8 Die hyperbolischen Funktionen

Def. 8.1

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \text{(sinus hyperbolicus)}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

Satz 8.1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y$$

Bew: (1)

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}\right]$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}\left[e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}\right]$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left[4\underbrace{e^{x}e^{-x}}_{1}\right] = 1$$

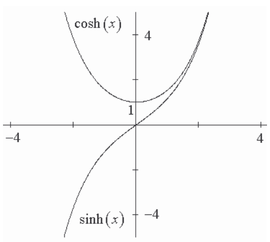
(2) & (3) analog

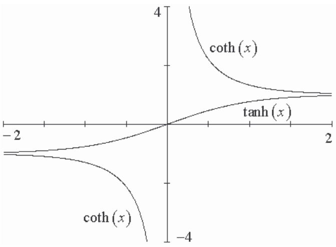
Bsp:

$$\cosh(0) = \frac{1}{2}\left(e^{0} + e^{-0}\right) = 1$$

$$\sinh(1) = \frac{1}{2}\left(e^{1} - e^{-1}\right) = 1{,}1752$$

Kurvenverlauf





$\sinh(x)$ umkehrbar für $-\infty < x < \infty$

$\cosh(x)$ umkehrbar für $0 \le x < \infty$

$\tanh(x)$ umkehrbar für $-\infty \le x < \infty$

$\coth(x)$ umkehrbar für alle $x \ne 0$

Def. 8.2

$$\sinh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arsinh}(y)$$
$$\cosh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcosh}(y)$$
$$\tanh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{artanh}(y)$$
$$\coth(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcoth}(y)$$

Definitionsbereiche

arsinh y $\{y \mid -\infty < y < \infty\}$

arcosh y $\{y \mid y \ge 1\}$

artanh y $\{y \mid -1 < y < 1\}$

arcoth y $\{y \mid 1 < y < -1\}$

Bsp1: $\operatorname{arsinh}(1) = ?$

$\operatorname{arsinh}(1) = a \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \sinh(a) = \frac{1}{2}\left(e^a - e^{-a}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad e^a - e^{-a} = 2$

Substitution: $e^a = u \quad \Rightarrow \quad u - \frac{1}{u} = 2 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 2u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \pm \sqrt{2} = \left\{\begin{matrix} 2,414 \\ -0,414 \end{matrix}\right\} = e^a \quad \Rightarrow \quad 2,414 = e^a$

$a = \ln 2,414 = 0,881 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}(1) = 0,881$

Bsp2: $\operatorname{arcosh}(0) = ?$

$\operatorname{arcosh}(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cosh(a) = \frac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right) == \quad \Rightarrow \quad e^a + e^{-a} = 0$

Substitution: $e^a = u \quad \Rightarrow \quad u + \frac{1}{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \pm j \quad \Rightarrow$ keine Lösung

Bsp3: $\operatorname{arsinh}(0) = ?$

$\operatorname{arsinh}(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sinh(a) = \frac{1}{2}\left(e^a - a^{-a}\right) = 0$

Substitution: $e^a = u \quad \Rightarrow \quad u^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad e^a = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad a = \ln(+1) = 0$

Bsp4: $\operatorname{arsinh}(4) = ?$

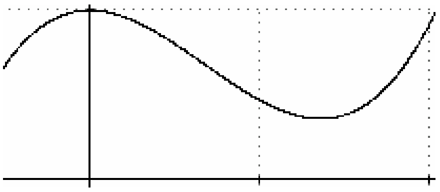
$\operatorname{arsinh}(4) = a \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \sinh(a) = \frac{1}{2}\left(e^a - e^{-a}\right) = 4$

Substitution: $\Rightarrow \quad u - \frac{1}{u} = 8 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 8u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 4 \pm \sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad e^a = 4 \pm \sqrt{17}$

$\Rightarrow \quad a = \ln\left(4 \pm \sqrt{17}\right) = \ln\left(4 + \sqrt{17}\right) = 2,0947$

9 Darstellung von Funktionen

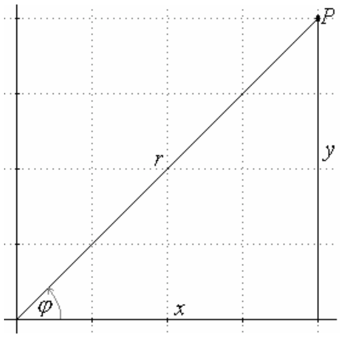
9.1 Das kartesische Koordinatensystem



$y = f\left(x\right)$

(von Descartes)

9.2 Polarkoordinaten



$P = \left(x \mid y\right) = \left(r \mid \varphi\right)$ $\left(x \mid y\right) \Leftrightarrow \left(r \mid \varphi\right)$ $r =$ Radius

$\varphi =$ Winkel (Bogenmaß)

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cdot\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r\cdot\sin\varphi$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\cdot\sin\varphi}{r\cdot\cos\varphi} = \tan\varphi$$

Umrechnungsformeln

$x = r\cdot\cos\varphi$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\cdot\sin\varphi$ $\qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

Bsp1: Kreis: $x^2+y^2=R^2$ in Polarkoordinaten?

$$\Rightarrow \quad \left(r\cdot\cos\varphi\right)^2+\left(r\cdot\sin\varphi\right)^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad r^2\left(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}\right)=R^2 \quad\Rightarrow\quad r^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad r=R$$

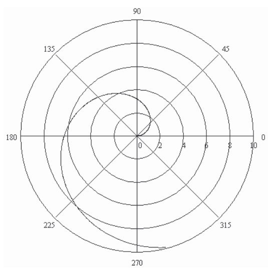
Bsp2: Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(r\cdot\cos\varphi\right)^2}{a^2}+\frac{\left(r\cdot\sin\varphi\right)^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad r^2\left[\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi}{b}\right)^2\right]=1 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{1}{\pm\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi}{b}\right)^2}}$$

Bsp3: $r = 2\varphi \quad\Rightarrow\quad$ Kurve?

Wertetabelle:

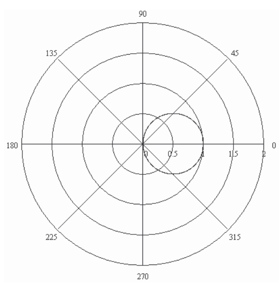
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$
r	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$1{,}5\pi$	2π	$2{,}5\pi$



Spirale

Bsp4: $r = \cos\varphi$

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\varphi$	φ	$\frac{5}{4}\varphi$	$1{,}5\varphi$	$\frac{7}{4}\varphi$
r	1	$0{,}7$	0	$\underbrace{--}_{\text{nur }>0}$	$--$	$--$	0	$0{,}7$

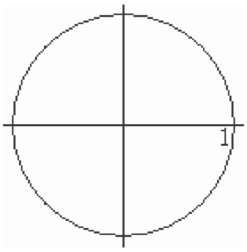


9.3 Funktionen in Parameterdarstellung

Darstellung: $x=\varphi(t)$ $\quad (a \le t \le b) \quad t = \text{Parameter}$

$y=\psi(t)$

Bsp1: $x=\sin t$
$y=\cos t$
$0 \le t \le 2\pi$



$t=0: \quad (0\,|\,1)$

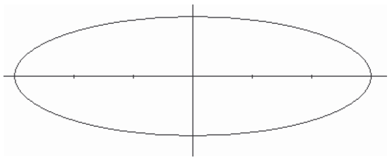
$t=\dfrac{\pi}{4}: \quad (0{,}7\,|\,0{,}7)$

$t=\dfrac{\pi}{2}: \quad (1\,|\,0)$

$t=\pi: \quad (0\,|\,-1)$

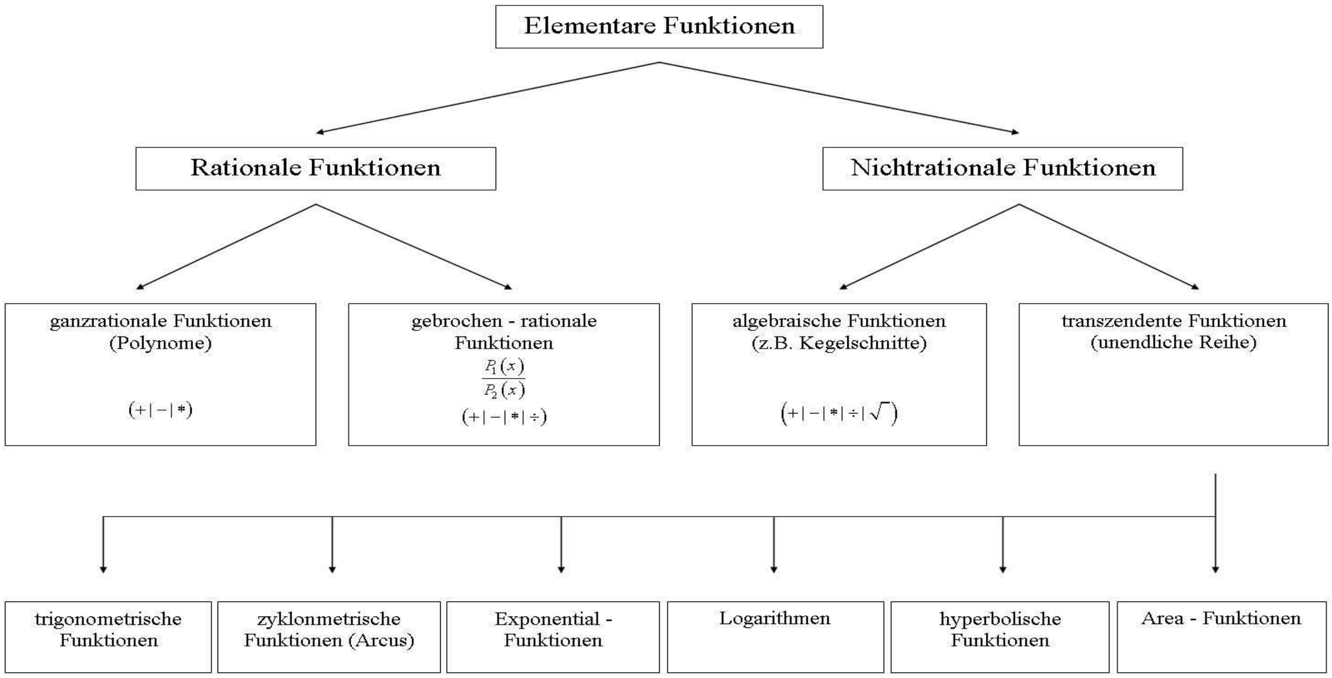
$t=1{,}5\pi: \quad (-0{,}7\,|\,-0{,}7)$

Bsp2: $x=3\cdot\cos t$
$y=\sin t$
$0 \le t \le 2\pi$



Bsp3: $x=t$
$y=3t+1 \quad \Rightarrow \quad y=3x+1$
$t\in\mathbb{R}$

9.4 Übersicht über die elementare Funktionen



9.5 Die nicht elementare Funktionen

(= REST)

Bsp1: $y=\begin{cases} 1 & (x \text{ rational}) \\ 0 & (x \text{ irrational}) \end{cases}$

Bsp2: $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$

Bsp3: Tabelle:

x	0	1	2	3
y	1	−4	9	7

IV DIFFERENTIALRECHNUNG

1 Die Ableitung

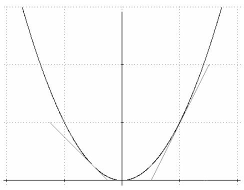
Vorbemerkung

(1) Es sei $y = f(x)$ eine Kurve. Eine lineare Funktion $y = ax + b$ die $f(x)$ an der Stelle x_0 „berührt“ heißt Tangente an x_0

(2) Die Steigung der Tangente an x_0 heißt Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0

(3) Eine Funktion die für jedes x_0 die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 angibt heißt Ableitung von $f(x)$

Bsp1: $y = x^2$



Ableitung von $x = 1$: 2

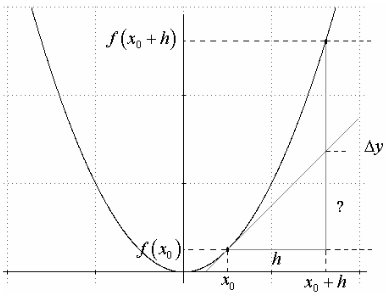
Ableitung von $x = -\frac{1}{2}$: 1

Ableitung von $x = 0$: 0

Bsp2: $y = 3x + 1$

Ableitung für alle x: 3

1.1 Berechnung der Ableitung



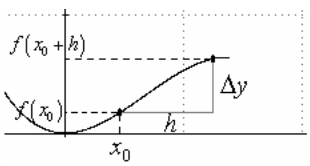
Ableitung bei $x_0 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta x = h$

Def. 1.1

> Sei $y = f(x)$ eine Funktion, dann heißt
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad h = \Delta x$$
> Differenzenquotient $(h = \text{Schrittweite})$

d.h.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Def. 1.2

> Sei $y = f(x)$ eine Funktion.
>
> Falls $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert, heißt $f(x)$ bei x_0 differenzierbar.
>
> Der Grenzwert heißt Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0.
>
> Bezeichnung: $y' \mid f'(x_0) \mid \frac{dy}{dx} \mid \frac{df(x_0)}{dx}$ $\quad$ (ableiten = differenzieren)

Beispiele:

(1) $y = x^2 = f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = ?$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^{\,2}}{h} = \frac{x_0^{\,2} + 2x_0h + h^2 - x_0^{\,2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$$

(2) $y = x$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{h} = 1$$

(3) $y = \sqrt{x}$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Def. 1.3

> Ist $f(x)$ differenzierbar für alle $x \in [a,b]$ (d.h. $a \le x \le b$), dann heißt $f(x)$ differenzierbar im Intervall a,b und $f'(x)$ heißt die Ableitung von $f(x)$

Beispiele

(1) $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y$ differenzierbar in $\mathbb{R}$

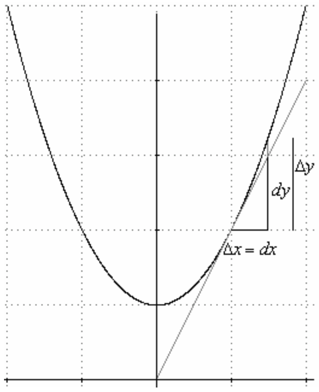
(2) Ableitung von $y = \dfrac{1}{x}$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)\cdot(x+h)\cdot x}{h\cdot(x+h)\cdot x} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \quad (x \ne 0)$$

y differenzierbar für alle $x \ne 0$

1.2 Das Symbol $\dfrac{dy}{dx}$



$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Mögliche Interpretation für $\dfrac{dy}{dx}$

(1) $\dfrac{dy}{dx} =$ Symbol für die Ableitung

(2) $y' = \dfrac{dy}{dx}$ $\left(dy, dx\right.$ kleine Zahlen, siehe Abbildung$\left.\right)$

$\Rightarrow \quad dy = y'dx$

2 Die Ableitungen der elementaren Funktionen

2.1 $y = x^n$ und $y = e^x$

Satz 2.1 $\boxed{y = c \quad \Rightarrow \quad y' = 0}$

Bew: $y' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0$

Satz 2.2 $\boxed{y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1}$

Bew: klar

Satz 2.3 $\boxed{y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})}$

Bew: $(x+h)^n \underset{\text{I, Satz 9.4}}{=} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + h^n$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + h^n\right) - x^n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot h^2 + \ldots + h^{n-1}\right] = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Bsp1: $y = x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 4x^3$

Bsp2: $y = x^7 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 7x^6$

Satz 2.4 $\boxed{y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x}$

Bew: $e^x \underset{\text{III, Satz 6.1}}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[e^x \cdot e^h - e^x\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot e^x \left(e^h - 1\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot e^x \left[\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \ldots\right) - 1\right] = \lim_{h\to 0} e^x \left[1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \ldots\right] = e^x$$

2.2 Ableitungsregeln

Satz 2.5

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & u(x) = a \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a \cdot f'(x) \\ (2) & u(x) = f(x) \pm g(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = f'(x) \pm g'(x) \end{array}}$$

Bew: (1)

$$h\to 0: \quad \underbrace{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{u'(x)} = \underbrace{\frac{af(x+h) + af(x)}{h}}_{\ldots} = \underbrace{a\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{a \cdot f'(x)}$$

(2)

$$h\to 0: \quad \underbrace{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{u'(x)} = \underbrace{\frac{\big(f(x+h) \pm g(x+h)\big) - \big(f(x) \pm g(x)\big)}{h}}_{\ldots} = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{f'(x) \pm g'(x)}$$

Beispiele:

$y = 3x \quad \Rightarrow \quad y' = 3$

$y = x^2 + x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x + 3x^2$

$y = 5x^2 + 7x^4 \quad \Rightarrow \quad 10x + 28x^3$

$y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2 + 6x - 2$

$y = 3e^x - 2x^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 3e^x - 10x^4$

Folgerung:

(1) $y = ax \quad \Rightarrow \quad y' = a$

(2) $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad \Rightarrow \quad P'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot j \cdot x^{j-1}$

Satz 2.6

Produktregel $(u - v - \text{Regel})$

$$\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \qquad \text{kurz: } (uv)' = u'v + uv'$$

Bew: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$\underset{h \to 0}{\rightarrow} \quad v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x) = f'(x)$$

Bsp: $y = x^2 \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$y = \left(1 + x^2\right)\left(1 - e^x\right) \quad \Rightarrow \quad y' = 2x\left(1 - e^x\right) + \left(1 + x^2\right)\left(-e^x\right)$

Satz 2.7

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v} - \text{Regel}\right)$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \qquad \text{kurz: } (uv)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Bew: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{v(x+h) \cdot v(x)}\left[v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] = \frac{1}{v^2}\left[v \cdot u' - u \cdot v'\right] = \frac{u'v - uv'}{v^2} = f'(x)$$

Beispiele:

$y = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}$

$y = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{0 \cdot e^x - e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$

$$y = \frac{(x+1)e^x}{x^2\left(e^x - 2\right)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\left[\left(e^x + (x+1)e^x\right) \cdot x^2\left(e^x - 2\right)\right] - \left[(x+1)e^x \cdot \left(2x\left(e^x - 2\right) + x^2 e^x\right)\right]}{\left(x^2\left(e^x - 2\right)\right)^2}$$

$$y = \frac{x^2 e^x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\left(2x \cdot e^x + x^2 e^x\right)(1-x) - x^2 e^x (-1)}{(1-x)^2}$$

$$y = \frac{x^2 + x}{x \cdot e^x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(2x+1)\left(x \cdot e^x\right) - \left(x^2 + x\right) \cdot \left(e^x + x \cdot e^x\right)}{\left(x \cdot e^x\right)^2}$$

$$y = x^3 e^{-x} = \frac{x^3}{e^x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{e^{2x}}$$

Bsp1: $y = e^z; \quad z = 3x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{3x-1}$

Satz 2.8

> Kettenregel
> $y = f(x)$ und $z = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = f\left(g(x)\right)$
> $\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}$

Bew: $\dfrac{dy}{dx} = \lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Beispiele:

(1) $y = e^{3x-1} \quad \Rightarrow \quad y = e^z; \quad z = 3x - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot 3 = 3e^{3x-1}$$

(2) $y = (x+1)^9 \quad \Rightarrow \quad z = x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 9z^8 \cdot 1 = 9(x+1)^8$$

neu: (1) $y = e^{3x-1} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{3x-1} \cdot 3$

(2) $y = (x+1)^9 \quad \Rightarrow \quad y' = 9(x+1)^8 \cdot 1$

Merkregel: $y' = (\text{Äußere Ableitung}) \cdot (\text{Innere Ableitung})$

(3) $y = e^{3x^2 - 6x + 1} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{3x^2 - 6x + 1} \cdot (6x - 6)$

(4) $y = 3^x = e^{x \cdot \ln 3} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{x \cdot \ln 3} \cdot \ln 3 = \ln 3 \cdot 3^x$

(5) $y = \left(1 - x^2\right)^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 4\left(1 - x^2\right)^3 \cdot (-2x)$

(6) $y = e^{x^2 - 1} \cdot \left(x^2 + 3x\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left[e^{x^2-1} \cdot 2x\right]\left(x^2 + 3x\right) + e^{x^2-1} \cdot (2x + 3)$

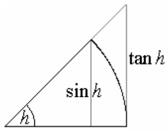
(7) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^5} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{4x^3 \cdot (x+1)^5 - x^4 \cdot \left[5(x+1)^4 \cdot 1\right]}{(x+1)^{10}}$

2.3 Die trigonometrische Funktionen

Hilfssatz: (1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1 \quad (h>0)$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{h}=0$

Bew: (1) Abbildung $\Rightarrow \sin h \le h \le \tan h \Rightarrow \sin h \le h \le \dfrac{\sin h}{\cos h}$



$$\Rightarrow \sin h \le h \Rightarrow \frac{\sin h}{h}\le 1$$

$$\underset{\text{und}}{\Rightarrow} h \le \frac{\sin h}{\cos h} \Rightarrow \cos h \le \frac{\sin h}{h}$$

$$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1 \underset{h\to 0}{\Rightarrow} 1 \le \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\le 1$$

(2) $1-\cos h = 2\cdot\sin^2\dfrac{h}{2}$ (III, Abschnitt 7.4)

$$\Rightarrow \frac{1-\cos h}{h}=\frac{2\cdot\sin^2\frac{h}{2}}{h}=\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1}\cdot\underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{0}\underset{h\to 0}{\rightarrow} 0$$

Satz 2.9

(1)	$y=\sin x$	$\Rightarrow y'=\cos x$
(2)	$y=\cos x$	$\Rightarrow y'=-\sin x$

Bew: (1) $\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h}=\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$

$$=\frac{1}{h}\left[\sin x\cdot\cos h+\sin h\cdot\cos x\right]-\sin x=\sin x\cdot\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{0}+\cos x\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} \rightarrow \cos x\cdot 1=\cos x$$

(2) $\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h}=\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$

$$=\frac{1}{h}\left[\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h\right]-\cos x=\cos x\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{0}-\sin x\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} \rightarrow -\sin x$$

Bsp: $y=\sin\left(x^2+2\right) \Rightarrow y'=\cos\left(x^2+2\right)\cdot 2x$

$y=\cos\left(e^{3x}\right) \Rightarrow y'=-\sin\left(e^{3x}\right)\cdot e^{3x}\cdot 3$

$y=\sin x^2 \Rightarrow y'=\cos x^2\cdot 2x$

Satz 2.10

(1)	$y=\tan x$	$\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
(2)	$y=\cot x$	$\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-1-\cot^2 x$

Bew: (1) $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{u}{v}$

$$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}\underset{(1)}{=}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\underset{(2)}{=}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

(2) $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \underset{(1)}{=} -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\underset{(2)}{=} -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

Bsp: $y = \tan\left(3x^2 - 7x\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left[1 + \tan^2\left(3x^2 - 7x\right)\right](6x - 7)$

$y = \cot\left(\sin\left(e^{1-x}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left[-1 - \cot^2\left(\sin\left(e^{1-x}\right)\right)\right]\left(\cos\left(e^{1-x}\right)\right)\cdot e^{1-x}\cdot(-1)$

$y = \tan\left(1 - e^{x^2-2}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left[1 + \tan^2\left(1 - e^{x^2-2}\right)\right]\left(-e^{x^2-2}\right)(2x)$

2.4 Die Arcusfunktionen

Satz 2.11

Sei $f^{-1}(y) = x$ die Umkehrfunktion zu $y = f(x)$, dann gilt bei Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)}$$

Bew: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad \underset{\Delta x \to 0}{\Rightarrow} \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

Bsp1: $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos y} \underset{\substack{\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \\ \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bsp2: $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bsp3: $y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Bsp4: $y = \operatorname{arccot} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cot y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-1-\cot^2 y} = \frac{1}{-1-x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Satz 2.12

(1) $\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Bsp: $y=\dfrac{1}{\arctan\left(x^2-3x\right)} \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{0-1\cdot\dfrac{1}{1+\left(x^2-3x\right)^2}\cdot(2x-3)}{\arctan^2\left(x^2-3x\right)}=-\dfrac{2x-3}{\arctan^2\left(x^2-3x\right)\left(1+\left(x^2-3x\right)^2\right)}$

2.5 Hyberbolische Funktionen, Areafunktionen

Satz 2.13

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{d\sinh(x)}{dx}=\cosh x \\ (2) & \dfrac{d\cosh(x)}{dx}=\sinh x \\ (3) & \dfrac{d\tanh(x)}{dx}=1-\tanh^2 x=\dfrac{1}{\cosh^2 x} \\ (4) & \dfrac{d\coth(x)}{dx}=1-\coth^2 x=-\dfrac{1}{\sinh^2 x} \end{array}}$$

Bew: (1) $\dfrac{d\sinh(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\cosh x$

(2) $\dfrac{d\cosh(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\sinh x$

(3) $\dfrac{d\tanh(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right]=\dfrac{\cosh x\cdot\cosh x-\sinh x\cdot\sinh x}{\cosh^2 x}\underset{\cosh^2 x-\sinh^2 x=1}{=}\dfrac{1}{\cosh^2 x}=1-\dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$

(4) $\dfrac{d\coth(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\cosh x}{\sinh x}\right]=\ldots\quad(\text{analog})$

Satz 2.14

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & (\operatorname{arsinh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ (2) & (\operatorname{arcosh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ (3) & (\operatorname{artanh} x)'=\dfrac{1}{1-x^2} \\ (4) & (\operatorname{arcoth} x)'=\dfrac{1}{1-x^2} \end{array}}$$

Bew: (1) $y=\operatorname{arsinh} x \quad\Leftrightarrow\quad x=\sinh y$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cosh y}\underset{\cosh^2 y-\sinh^2 y=1}{=}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2), (3) & (4) analog

2.6 Potenzen und Logarithmen

Satz 2.15

$$\boxed{y=\ln x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)}$$

Bew: $y=\ln x \quad\Leftrightarrow\quad x=e^y$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$

Bsp: $y=\ln(\tan x) \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{1}{\tan x}\cdot\left(1+\tan^2 x\right)$

Satz 2.15

α – Regel
$$y = x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Bew: $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln x} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

Beispiele:

(1) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(2) $y = 3^x = e^{x \cdot \ln 3} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{x \cdot \ln 3} \cdot \ln 3 = 3^x \cdot \ln 3$

(3) $y = \sqrt[3]{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2x)$

(4) $y = e^{3x^2-1} + \sqrt{\frac{5x-1}{3x^2+1}} = e^{3x^2-1} + \left(\frac{5x-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \left(e^{3x^2-1}\right) \cdot 6x + \frac{1}{2}\left(\frac{5x-1}{3x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{5\left(3x^2+1\right) - (5x-1) \cdot 6x}{\left(3x^2+1\right)^2}\right]$

(5) $y = \sin\sqrt{1+x^4} + \tan\left(e^{x^5-3x}\right) = \sin\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{3}} + \tan\left(e^{x^5-3x}\right)$

$y' = \left[\cos\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{3}}\right] \cdot \frac{1}{3}\left(1-x^4\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-4x^3\right) + \left[1+\tan^2\left(e^{x^5-3x}\right)\right]\left(e^{x^5-3x}\right)\left(5x^4-3\right)$

(6) $y = \sin\left(x^2+2x\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left[\cos\left(x^2+2x\right)\right](2x+2)$

(7) $y = \frac{e^{x^2}}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x(1-x) - e^{x^2}(-1)}{(1-x)^2}$

2.7 Ableitungsregeln

y	y'	y	y'	y	y'	y	y'
a	0	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ $1+\tan^2 x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$ $-1-\cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$ $1-\tanh^2 x$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$ $1-\coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Differentiationsregeln

$$[c \cdot u]' = c \cdot u' \quad (c = \text{const})$$

$$[u+v]' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$y = f(z); \quad z = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

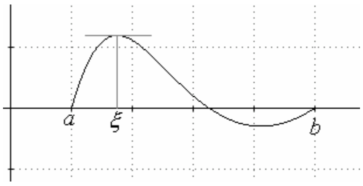
3 Sätze und Definitionen zur Differentialrechnung

3.1 Satz von Rolle, Mittelwertsatz

Satz 3.1

Satz von Rolle
Vorraussetzung: $f(x)$ in $a \le x \le b$ differenzierbar $\quad f(a) = f(b) = 0$
Behauptung: Es gibt eine Stelle ξ mit $a \le \xi \le b$, so dass $f'(\xi) = 0$

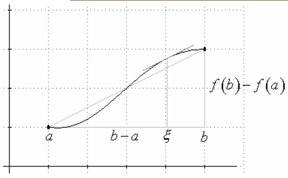
d.h.



Satz 3.2

Mittelwertsatz der Differentialrechnung
Vorraussetzung: $f(x)$ in $a \le x \le b$ differenzierbar
Behauptung: Es gibt eine Stelle ξ mit $a \le \xi \le b$, so dass $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

d.h.



Bew: Sei $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= 0 \\ g(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \quad g'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad g'(\xi) = 0 = f'(\xi) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-0) \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Satz 3.3

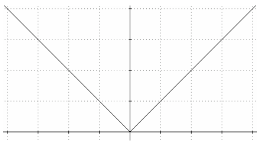
$y = f(x)$ in x_0 differenzierbar
$\Rightarrow \quad y = f(x)$ in x_0 stetig $\qquad$ (Umkehrung gilt nicht)

Bew: $\dfrac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} \underset{x_1+h=x_2}{=} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} a = f'(x_1)$

gilt nur, wenn $f(x_2) - f(x_1) \to 0 \quad x_2 \to x_1$

$\Rightarrow \quad f(x_2) \to f(x_1) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x_2 \to x_1} f(x_2) = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad$ stetig

Umkehrung $y = |x|$



bei $x = 0$ nicht differenzierbar (aber stetig)

3.2 Höhere Ableitungen

Def. 3.1

$$\boxed{\begin{aligned}
&y = f(x)\\
&\Rightarrow\quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}\\
&\Rightarrow\quad y'' = \left(f'(x)\right)'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)\\
&\Rightarrow\quad y''' = \left(f''(x)\right)' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}\\
&\Rightarrow\quad y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'\\
&\ldots\\
&\Rightarrow\quad y^{(n)} = f^{(n)}(x)
\end{aligned}}$$

Beispiele:

(1) $y = \sin x \quad\Rightarrow\quad y' = \cos x \quad\Rightarrow\quad y'' = -\sin x \quad\Rightarrow\quad y''' = -\cos x \quad\Rightarrow\quad y^{(4)} = \sin x$

(2) $y = x^3 \quad\Rightarrow\quad y' = 3x^2 \quad\Rightarrow\quad y'' = 6x \quad\Rightarrow\quad y''' = 6 \quad\Rightarrow\quad y^{(4)} = 0$

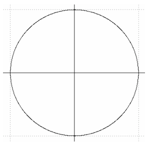
(3) $y = u\cdot v \quad\Rightarrow\quad y' = u'v + uv' \quad\Rightarrow\quad y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2v'v' + uv''$

3.3 Differentiation von Funktionen in Parameterdarstellung

Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t)\\ y &= \psi(t)\end{aligned} \qquad (a \le t \le b)$$

Bsp:



$$\begin{aligned} x &= \cos t\\ y &= \sin t\end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \psi(t)\\ x &= \varphi(t)\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \psi'(t)\\ \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t)\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Folgerung:

Satz 3.4

$$\boxed{\begin{aligned} &x = \varphi(t);\quad y = \psi(t) \qquad (\text{Parameterdarstellung})\\ &\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\end{aligned}}$$

Anmerkung: $t = \text{Zeit} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y} \qquad \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}$

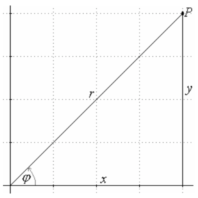
Bsp1: $x = t;\quad y = 3t;\quad t \in \mathbb{R} \qquad (y = 3x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

Bsp2: $x = \cos t;\quad y = \sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

3.4 Differentiation in Polarkoordinaten

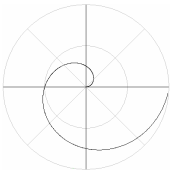


Umrechnung:
$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

Bsp1: $r = \varphi$ (Kurve)

$\frac{dy}{dx} = ?$



Herleitung der Ableitung $\frac{dy}{dx}$

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

Kurve: $r = r(\varphi)$

$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi$

$y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= r'(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi \\ \frac{dy}{d\varphi} &= r'(\varphi) \cdot \sin\varphi + r(\varphi) \cdot \cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{d\varphi}}{\frac{dy}{d\varphi}} = \frac{r'(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi}{r'(\varphi) \cdot \sin\varphi + r(\varphi) \cdot \cos\varphi}$$

$\Rightarrow$ Ableitung in Polarkoordinaten für die Kurve $r = r(\varphi)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi}{r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi}$$

Bsp1: (Fortsetzung) $(r = \varphi)$

$\varphi = 0:$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot \sin 0 + \varphi \cdot \cos 0}{1 \cdot \cos 0 - \varphi \cdot \sin 0} = 0$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}:$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2}}{1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} = -0{,}64$$

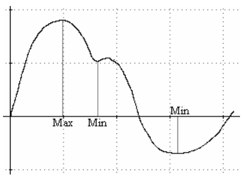
4 Anwendung der Differentialrechnung

4.1 Extrema

Def. 4.1

$y = f(x)$ In x_0 hat $f(x)$ ein
(1) Maximum: $\Leftrightarrow$ $f(x_0 + h) < f(x_0)$ $(h \text{ klein})$
(2) Minimum: $\Leftrightarrow$ $f(x_0 + h) > f(x_0)$ $(h \text{ klein})$ $[(\text{Max} \mid \text{Min}) = \text{Extremum}]$

Bsp1:



Satz 4.1

$f(x)$ hat in x_0 ein Extremum $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ (nicht andersrum)

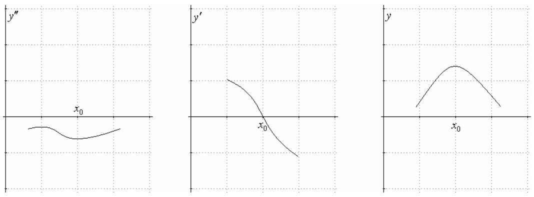
Bew: Steigung der Tangente ist 0

Bsp2: $y = x^2 - 4x$
Min: $y' = 0 = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$

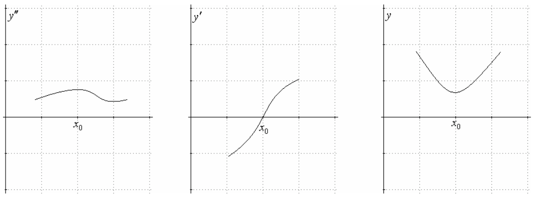
Satz 4.2

(1) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 Maximum
(2) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 Minimum

Bew: (1) $y'' < 0$



(2) $y'' > 0$



Bsp3: $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x$

gesucht: Extrema

$y' = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

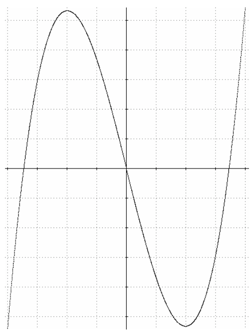
$y''(2) = 2x = 2 \cdot 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ Min

$y''(-2) = 2x = 2 \cdot (-2) = -4 < 0 \Rightarrow$ Max

Nullstellen

$\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{12}$



Bsp4: $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$
Extrema = ?

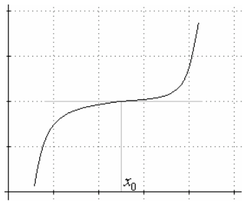
$$y' = x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

$$y'' = 2x + 4 = 0 \qquad y''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{in } x = 1: \text{ Min}$$

$$y''(-5) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{in } x = -5: \text{ Max}$$

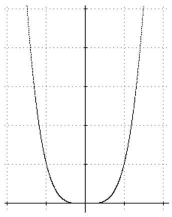
Der Fall $y'' = 0$

Fall1: $y' = 0; \quad y'' = 0 \qquad (\text{bei } x_0)$



Sattelpunkt

Fall2: $y' = 0; \quad y'' = 0 \qquad (\text{bei } x_0)$

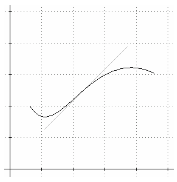


Bsp:

$y = x^4$

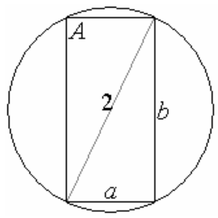
$$\left.\begin{aligned} y' &= 4x^3 \\ y'' &= 12x^2 \end{aligned}\right\} 0 \text{ bei } x = 0$$

Fall3: $y' \neq 0; \quad y'' \neq 0$



4.2 Extremwertaufgaben

(1) In einem Kreis mit $r = 1$ soll ein Rechteck mit maximaler Fläche eingeschrieben werden.



$A = a \cdot b = \text{Max}$

Nebenbedingung: $a^2 + b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{4 - a^2}$

$$A = a \cdot \sqrt{4 - a^2} = a \cdot \left(4 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{da} = 0 = \sqrt{4 - a^2} + a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{4 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{4 - a^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - a^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad b = \sqrt{4 - a^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

(2) Ein Tank soll $600l$ fassen. Die Form sei die eines Zylinders. Bei welchen Abmessungen sind die Materialkosten am wenigsten?

$A = 2r\pi h + 2r^2\pi$

Nebenbedingung: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 6000l = 6m^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{6}{r^2 \cdot \pi}$

h einsetzen: $A = 2r\pi \cdot \frac{6}{r^2 \cdot \pi} + 2r^2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{r} + 2\pi r^2 = 12r^{-1} + 2\pi r^2$

$$\frac{dA}{dr} = -12r^{-2} + 4\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{12}{r^2} + 4\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad -12 + 4\pi r^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{12}{4\pi}} = 0{,}985 \qquad h = \frac{6}{r^2\pi} = \frac{6}{0{,}985^2 \cdot \pi} = 1{,}985$$

Probe: $\frac{d^2A}{dr^2} = 24r^{-3} + 4\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$

(3) Ein Geschoss werde senkrecht nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 40\dfrac{m}{s}$ abgeschossen. Nach wieviel Sekunden erreicht es die größte Höhe? (Luftreibung vernachlassigen)

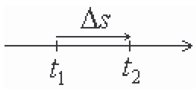
$$\text{Höhe} = s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \text{Max}$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{40}{9{,}81} \approx 4s$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}$$

4.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ein Punkt P_1 bewege sich geradlinig.

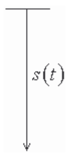


$s(t)$ = zurückgelegter Weg zur Zeit t

$$s'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = v = \text{Geschwindigkeit}$$

$$s''(t) = v' \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{Zunahme Geschw}}{\text{Zeit}} = a = \text{Beschleunigung}$$

Bsp1: freier Fall

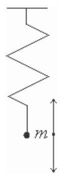


$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad v = s' = gt \quad \Rightarrow \quad a = g$$

Übliche Schreibweise:

$$s(t) = \text{Weg} - \text{Zeit} - \text{Funktion:} \quad \Rightarrow \quad s'(t) = \dot{s} = v \quad \Rightarrow \quad s''(t) = \ddot{s} = a$$

Bsp2: Schwingungen



$$s(t) = A \cdot \sin \omega t \qquad (\omega = 2\pi f, \quad f = \text{Frequenz})$$

$$v = \dot{s} = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

$$a = \ddot{s} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

$$F = ma = -m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \quad (\text{Kraft})$$

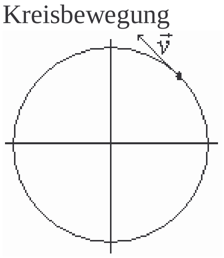
Bsp3: gleichförmige Bewegung

$$s(t) = \text{Weg} - \text{Zeit} - \text{Funktion}$$

$$\dot{s} = v = \text{const}$$

$$\ddot{s} = 0 = a$$

Bsp4: Kreisbewegung



Bewegung auf Kreis (Parameter)

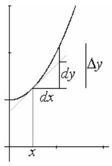
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \omega t \\ r \cdot \sin \tau \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \cdot \sin \omega t \\ r\omega \cdot \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cdot \cos \omega t \\ -r\omega^2 \cdot \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2\omega^2\left(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t\right)} = r\omega^2$$

$$F = ma = mr\omega^2$$

4.4 Fehlerrechnung

Bsp:



$$\Delta y \approx dy$$
$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy = y' \cdot dx$$

Def. 4.2

$$\boxed{dy = y' \cdot dx = \text{vollständiges (totales) Differential}}$$

Satz 4.3

> Fehlerrechnung
> Sei $y = f(x)$ differenzierbar. Ist x mit dem Fehler dx behaftet, so ergibt sich für y der Fehler $\Delta y \approx dy = y' \cdot dx$

Bsp1: Bei der Messung der Kantenlänge eines Würfels misst man $l = 131cm.$ Eventueller Messfehler $dl = 0{,}1cm.$
Wie wirkt sich der Messfehler auf das Volumen aus?
$V = l^3 \quad \Rightarrow \quad dV = V' \cdot dl = 3l^2 \cdot dl = 3 \cdot 131^2 \cdot 0{,}1 = 5148cm^3$
Probe: $131{,}1^3 - 131^3 = 5150$

Bsp2: Ein Sekundenpendel $(l = 99{,}4cm \quad \Rightarrow \quad T = 2s)$ sei um $0{,}01cm$ zu lang. Wie groß ist ΔT?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81}}$$

$$\Delta T \approx dT = T'dl = \frac{dT}{dl} \cdot dl = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{9{,}81}} \cdot l^{\frac{1}{2}}\right)' dl = \frac{2\pi}{\sqrt{9{,}81}} \cdot \frac{1}{2} l^{-\frac{1}{2}} \cdot dl$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{9{,}81} \cdot \sqrt{l}} \cdot dl = \frac{\pi}{\sqrt{9{,}81} \cdot \sqrt{99{,}4}} \cdot 0{,}01 = 0{,}0001005655 \quad \left(\frac{4s}{\text{Tag}}\right)$$

Satz 4.4

$$\boxed{y = y(x) \text{ differenzierbar} \quad \Rightarrow \quad y(x + dx) \approx y(x) + y''(x)dx}$$

Bew: $y(x + dx) - y(x) = \Delta y \approx dy = y' \cdot dx$

Bsp3: $\sqrt{4{,}1} = ?$

$y(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{4{,}1} = y(4{,}1) = y(4 + 0{,}1)$

$\approx y(4) + y'(4) \cdot 0{,}1 = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}1 = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}1 = 2{,}025 \quad (\text{exakt} = 2{,}0248)$

Bsp4: $\sin(3) = ?$

$\sin(3) = \sin(3{,}14 - 0{,}14)$

$\approx \sin(3{,}14) + \cos(3{,}14) \cdot (-0{,}14) = 0 - (-1) \cdot 0{,}14 = 0{,}14 \quad (\text{exakt} = 0{,}14112)$

V INTEGRALRECHNUNG

1 Das unbestimmte Integral

1.1 Stammfunktion

Bsp1: $f(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3x^2 \quad (\text{ableiten})$

$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{4}x^4 \quad (\text{aufleiten})$

$F'(x)=f(x)$

Def. 1.1

> Eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x)=f(x)$

Bsp2: $f(x)=x^4-3x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{5}x^5-x^3$

$f(x)=\sin x \quad \Rightarrow \quad F(x)=-\cos x$

Bsp3: $f(x)=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x)=\ln(x)$

$F(x)=\ln(x)+3$

$F(x)=\ln(x)-7$

$F(x)=\ln(x)+c$

Satz 1.1

> Wenn $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x)$ ist, dann ist es auch $F(x)+c$
> wobei c eine beliebige Konstante ist.
> $\Rightarrow$ es gibt unendlich viele Stammfunktionen.

Bsp4: (1) $f(x)=e^x+1 \quad \Rightarrow \quad F(x)=e^x+x+c$

(2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}+c$

(3) $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \text{ rational}) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$ keine Stammfunktion

Def. 1.2

> Eine Funktion $f(x)$ in $a \le x \le b$ heißt integrierbar,
> falls eine Stammfunktion $F(x)$ mit $F'(x)=f(x)$ in $a \le x \le b$ existiert.

Def. 1.3

> Das Aufsuchen einer Stammfunktion zu $f(x)$ heißt Integration von $f(x)$.

Def. 1.4

> $F(x)=$ Stammfunktion zu $f(x) \quad \Rightarrow \quad F(x)=\int f(x)\cdot dx+c \qquad (f(x)=\text{Integrand})$

Bsp5: $\int x\cdot dx=\frac{x^2}{2}+c$

$\int \sin x\cdot dx=-\cos x+c$

$\int \sin \omega x\cdot dx=-\frac{1}{\omega}\cos \omega x+c$

$\int e^x\cdot dx=e^x+c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$

1.2 Grundformeln zur Integration

Aus Kapitel IV, 2.7 folgt:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\int a \cdot dx$	$ax+c$	$\int x^{\alpha} \cdot dx$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\int e^{x} \cdot dx$	$e^{x}+c$	$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln \lvert x \rvert + c$
$\int \sin x \cdot dx$	$-\cos x+c$	$\int \cos x \cdot dx$	$\sin x+c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ $\int (1+\tan^2 x)\, dx$	$\tan x+c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ $\int (1+\cot^2 x)\, dx$	$-\cos x+c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$ $(-1 \le x \le 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x+c$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$-\arccos x+c$
$\int \sinh x \cdot dx$	$\cosh x+c$	$\int \cosh x \cdot dx$	$\sinh x+c$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x}$ $\int (1-\tanh^2 x)\, dx$	$\tanh x+c$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x}$ $\int (\coth^2 x-1)\, dx$	$-\coth x+c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x+c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x+c$	$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x+c$	$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x+c$

Beispiele:

(1) $\int x^3 \cdot dx = \frac{1}{4} x^4 + c$

(2) $\int 3 \cdot dx = 3x + c$

(3) $\int x^4 \cdot dt = x^4 t + c$

(4) $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c$

(5) $\int \sqrt{x} \cdot dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

(6) $\int \sqrt{x}^{3} \cdot dx = \int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + c$

Satz 1.2 $\boxed{\int y' \cdot dx = y + c}$

Anmerkung:

$\int 0 \cdot dx = c$ $\qquad$ $\int a \cdot dx = ax + c$

1.3 Einfache Integrationsregeln

Satz 1.3 $\boxed{\int a \cdot f(x) \cdot dx = a \int f(x) \cdot dx}$

Bew: Sei $F'(x) = f(x)$ $\quad (F = \text{Stammfunktion})$ $\quad \Rightarrow \int f(x)\, dx = F(x) + c$

$$\left.\begin{array}{l} \int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot F(x) + c \\ a \int f(x)\, dx = a\left(F(x) + c'\right) = a \cdot F(x) + \underbrace{a \cdot c'}_{c''} \end{array}\right] =$$

Beispiele:

$\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = 3\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x^3 + c'$

$\int -e^x dx = \int (-1) e^x dx = (-1)\int e^x dx = -e^x + c$

$$\int \frac{3}{x} dx = 3\int \frac{1}{x} dx = 3 \ln |x| + c$$

Anmerkung:
Ein negatives Vorzeichen darf vor das Integral gezogen werden.

Satz 1.4

$$\boxed{\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}$$

Bew: $\int f(x)\, dx = F(x) + c$

$\int g(x)\, dx = G(x) + c$

$$\Rightarrow \quad \left(F(x) + G(x) + c \right)' = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{F(x)}_{\int f(x) dx} + \underbrace{G(x)}_{\int g(x) + c} + c = \int \left(f(x) + g(x) \right) dx$$

Beispiele:

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} + \ln |x| + c$$

$$\int \left(x^3 - 2x^2 + 1 \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x + c$$

$$\int \left(\sin x - \cos x \right) dx = -\cos x - \sin x + c$$

$$\int \left(3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 4 \right) dx = \frac{3x^5}{5} - \frac{7x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x + c$$

Anmerkung: Integration von Polynomen

$$\int \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) dx = \sum_{j=0}^{n} \int a_j x^j dx = \sum_{j=0}^{n} a_j \int x^j dx = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{x^{j+1}}{j+1} + c$$

Bsp: $\int \left(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x \right) dx = \frac{4x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$

1.4 Integration durch Substitution

Satz 1.5

Integration durch Substitution

$$\int f(x)\, dx \underset{x=\varphi(z)}{=} \int f\left(\varphi(z) \right) \cdot \varphi(z) \cdot dz$$

Bew: $\int f(x)\, dx = F(x) + c$

$x = \varphi(z) \quad \Rightarrow \quad G(z) = F\left(\varphi(z) \right) + c$

$$\Rightarrow \quad G'(z) \underset{\text{Kettenregel}}{=} F'\left(\varphi(z) \right) \cdot \varphi'(z) = F'(x) \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot \varphi'(z)$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x) \cdot \varphi'(z) \cdot dz = \int G'(z) \cdot dz = G(z) + c = F\left(\varphi(z) \right) + c = F(x) + c = \int f(x) \cdot dx$$

formal: $\int f\left(\varphi(z) \right) \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot dz \underset{x=\varphi(z)=\varphi}{=} \int f(x)\, dx$

Def. 1.5

$$\boxed{\int d \cdot f(x) = \int \frac{d \cdot f(x)}{dx} \cdot dx = \int f'(x)\, dx = f(x) + c}$$

Beispiele:

(1) einfacher: $\int \sin(x+1)\, dx \underset{\substack{z=x+1 \\ \frac{dz}{dx}=1 \;\leftarrow\; dz=f'(x)dx \\ dz=dx}}{=} \int \sin z \cdot dz = -\cos z + c = -\cos(x+1) + c$

(2) $$\int \frac{dx}{1+16x^2} \underset{\substack{z=4x\\ dz=4dx}}{=} \int \frac{\frac{1}{4}dz}{1+z^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4}\arctan z + c = \frac{1}{4}\arctan 4x + c$$

(3) $$\int (\ln x)\frac{1}{x}dx \underset{\substack{z=\ln x\\ dz=\frac{1}{x}dx}}{=} \int z\cdot dz = \frac{z^2}{2}+c = \frac{1}{2}\cdot \ln^2(x)+c$$

(4) $$\int \frac{dx}{3-2x} \underset{\substack{z=3-2x\\ dz=-2dx\\ -\frac{1}{2}dz=dx}}{=} \int \frac{-\frac{1}{2}dz}{z} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\ln|z|+c = -\frac{1}{2}\cdot \ln|3-2x|+c$$

(5) $$\int (\cos x^2)\cdot x\cdot dx \underset{\substack{z=x^2\\ dz=2x\cdot dx\\ x\cdot dx=\frac{dz}{2}}}{=} \int (\cos z)\cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int (\cos z)\,dz = \frac{1}{2}\sin z + c = \frac{1}{2}\sin x^2 + c$$

(6) $$\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+1}\cdot dx \underset{\substack{z=x^3-3x^2+1\\ dz=(3x^2-6x)dx}}{=} \int \frac{dz}{z} = \ln|z|+c = \ln|x^3-3x^2+1|+c$$

(7) $$\int \tan x\cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx \underset{\substack{z=\cos x\\ dz=-\sin x\cdot dx}}{=} -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z|+c = -\ln|\cos x|+c$$

(8) $$\int x\cdot \sin x^2\cdot dx \underset{\substack{z=x^2\\ dz=2x\cdot dx\\ \frac{dz}{dx}=2x}}{=} \int x\cdot \sin z\cdot \frac{1}{2x}\cdot dz = \frac{1}{2}\int \sin z\cdot dz = \frac{1}{2}(-\cos z)+c = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

(9) $$\int \frac{x}{x^2-1}\cdot dx \underset{\substack{z=x^2-1\\ dz=2x\cdot dx}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\cdot \ln|z|+c = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2-1|+c$$

(10) $$\int x^2\cdot e^{x^3}\cdot dx \underset{\substack{z=x^3\\ dz=3x^2dx}}{=} \frac{1}{3}\int e^z dz = \frac{1}{3}e^z + c = \frac{1}{3}e^{x^3}+c$$

Satz 1.6
$$\boxed{\int \frac{1}{x}\cdot dx = \ln|x|+c}$$

Bew: Fall1: $x>0 \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c \underset{x=|x|}{=} \ln|x|+c$

Fall2: $x<0 \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{x}dx \underset{\substack{z=-x\\ dz=-dx}}{=} \int \frac{1}{-z}\cdot(-dz) = \int \frac{1}{\underbrace{z}_{z>0}}\cdot dz = \ln z + c \underset{|z|=|-x|=|x|}{=} \ln|x|+c$

Satz 1.7
$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx = \ln|f(x)|+c}$$

Bew: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx \underset{\substack{z=f(x)\\ dz=f'(x)dx}}{=} \int \frac{dz}{z} = \ln|f(x)|+c$

Bsp1: $\int \frac{24x^3-6x}{6x^4-3x^2}\cdot dx = \ln|6x^4-3x^2|+c$

Bsp2: $\int \frac{x^2-\frac{1}{3}}{x^3-x}\cdot dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2-1}{x^3-x}\cdot dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-x|+c$

Bsp3: $\int \tan x\cdot dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\cdot dx = -\ln|\cos x|+c$

1.5 Partielle Integration

Herleitung: $u-v-\text{Regel: } (u\cdot v)' = u'v+uv'$

$$\Rightarrow \quad u'v = (u\cdot v)' - uv' \quad \Rightarrow \quad \int u'v\cdot dx = \int (uv)'\,dx - \int uv'dx \quad \Rightarrow \quad \int u'v\cdot dx = uv - \int uv'dx$$

Satz 1.8

Partielle Integration

$$\int u'v\cdot dx = uv - \int uv'dx \qquad \begin{pmatrix} u = u(x) \\ v = v(x) \end{pmatrix}$$

Beispiele:

(1) $\int x\cdot e^x\cdot dx = x\cdot e^x - \int e^x\cdot 1\cdot dx = xe^x - e^x + c$

(2) $\int x\cdot \cos x\cdot dx = x\cdot \sin x - \int \sin x\cdot 1\cdot dx = xe^x - e^x + c$

(3) $\int \ln x\cdot dx = \int 1\cdot \ln x\cdot dx = x\cdot \ln - \int x\cdot \frac{1}{x}\cdot dx = x\cdot \ln x - x + c$

(4) $\int x^2\cdot \sin x\cdot dx = x^2\cdot(-\cos x) - \int 2x\cdot(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cdot\cos x\cdot dx = -x^2\cos x + 2\left[x\cdot\sin x - \int 1\cdot \sin x\cdot dx\right]$

$= -x^2\cdot\cos x + 2[x\cdot\sin x + \cos x] + c$

(5) $\int x\cdot \sinh x\cdot dx = x\cdot\cosh x - \int 1\cdot\cosh x\cdot dx = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$

(6) $\int 1\cdot \arcsin x\cdot dx = x\cdot\arcsin x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx \underset{\substack{z=1-x^2\\ dz=-2x\cdot dx}}{=} x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}$

$= x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\cdot dz = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{1}{2}}\right] = x\cdot\arcsin x + \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + c$

(7) $\int \sin^2 x\cdot dx = \int \sin x\cdot\sin x\cdot dx = (-\cos x)\cdot\sin x - \int(-\cos x)\cdot\cos x\cdot dx = -\cos x\cdot\sin x + \int\cos^2 x\cdot dx$

$= -\cos x\cdot\sin x + \int\left(1-\sin^2 x\right)\cdot dx = -\cos x\cdot\sin x + \int 1\cdot dx - \int\sin^2 x\cdot dx = -\cos x\cdot\sin x + x - \int\sin^2 x\cdot dx$

$\Rightarrow \quad 2\int\sin^2 x\cdot dx = -\cos x\cdot\sin x + x + c' \quad \Rightarrow \quad \int\sin^2 x\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\sin x + \frac{x}{2} + c$

(8) $\int\cos^2 x\cdot dx = \int\cos x\cdot\cos x\cdot dx \underset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} \sin x\cdot\cos x - \int\sin x\cdot(-\sin x)\cdot dx = \sin x\cdot\cos x + \int\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\cdot dx$

$= \sin x\cdot\cos x + \int\left(1-\cos^2 x\right)\cdot dx = \sin x\cdot\cos x + x - \int\cos^2 x\cdot dx = \int\cos^2 x\cdot dx$

$\Rightarrow \quad 2\int\cos^2 x\cdot dx = \sin x\cdot\cos x + x \quad \Rightarrow \quad \int\cos^2 x\cdot dx = \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x + x\cdot\frac{1}{2}$

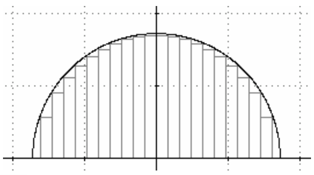
(8) $\int x\cdot\ln x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c$

2 Das bestimmte Integral

2.1 Flächenberechnung

Bsp1: Rechteck
Fläche: $A = a \cdot b$ Definition: $A = a \cdot b$

Bsp2: Halbkreis

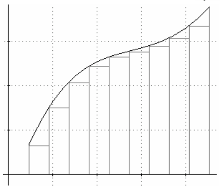


Fläche: $A = \frac{1}{2} r^2 \pi$ warum?

Berechnung von A

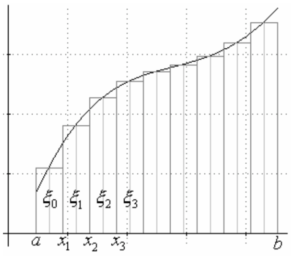
$A = \sum$ Rechteckflächen

Bsp3: $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$



$A = \sum$ Rechteckflächen

Berechnung der Fläche in Bsp3:



Fläche Rechteck Nr1: $(x_1 - x_0) \cdot f(\xi_0)$

Fläche Rechteck Nr2: $(x_2 - x_1) \cdot f(\xi_1)$ $\xi_3 \quad \xi_4 \; a \quad b$

Fläche Rechteck Nr3: $(x_3 - x_2) \cdot f(\xi_2)$

………

$$A \approx \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \cdot f(\xi_j) \quad \Rightarrow \quad A = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \cdot f(\xi_j)$$

2.2 Das bestimmte Integral

Def. 2.1

> Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $(a \le x \le b)$ definiert. Wenn für alle möglichen Intervallzerlegungen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ mit $x_j \le \xi_j \le x_{j+1}$ (für alle j) gilt,
>
> der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$ existiert und ist gleich einer Zahl A,
>
> dann heißt A das bestimmte Integral von a bis b
>
> Symbol: $A = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad$ (Fläche)

Anmerkung:

$\int_a^b f(x)\,dx =$ Fläche = Zahl aber $\int f(d)\,dx =$ Menge der Stammfunktionen

Def. 2.2

> Wenn das Integral $\int_a^b f(x) \cdot dx$ existiert, heißt $f(x)$ über dem Intervall $a \le x \le b$ integrierbar.

Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion

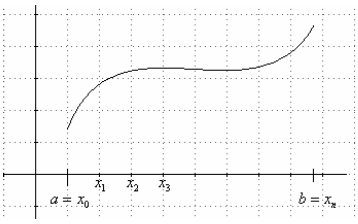
$$y = \begin{cases} 0 & (x \text{ rational}) \\ 1 & (x \text{ irrational}) \end{cases} \qquad (0 \le x \le 1)$$

nicht integrierbar, denn $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \begin{cases} 0 & \xi_j = \text{rational} \\ 1-0 & \xi_j = \text{irrational} \end{cases}$

Satz 2.1

> Sei $f(x)$ über $a \le x \le b$ integrierbar und $F(x)$ Stammfunktion zu $f(x)$,
>
> dann gilt: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$

Bew:



$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = -F(x_n) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-2}) - \ldots + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1}\Big(F(x_{j+1}) - F(x_j)\Big)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} F'(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \underset{F'=f}{=} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

2.3 Beispiele zur Flächenberechnung

(1) $y = x \qquad (0 \le x \le 1)$

$$A = \int\limits_0^1 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) $y = x^2 \qquad (0 \le x \le 1)$

$$A = \int\limits_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

(3) $y = x \qquad (-1 \le x \le 1)$

$$A = \int\limits_{-1}^1 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

(4) $y = \sin x \qquad (0 \le x \le \pi)$

$$A = \int\limits_0^\pi \sin x \cdot dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

(5) Änderung der Grenzen bei Subtitution

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+16x^2} \underset{\substack{z=4x\\ dz=4dx}}{=} \frac{1}{4}\int\limits_0^4 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4}\left[\arctan z\right]_0^4 = \frac{1}{4}(\arctan 4 - \arctan 0) = 0{,}3314$$

(6) $$\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos x^2 \cdot dx \underset{\substack{d=x^2\\ dz=2x\cdot dx}}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos z \cdot dz = \frac{1}{2}\left[\sin z\right]_0^\pi = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

(7) Kreisfläche

Kreis: $x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad$ (Halbkreis)

$$A = 2\cdot\int\limits_{-r}^r y \cdot dx = 2\cdot\int\limits_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\cdot\int\limits_{-r}^r r\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\cdot dx$$

$$\underset{\substack{z=\frac{x}{r}\\ dz=\frac{1}{r}dx}}{=} 2r^2\cdot\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-z^2}\cdot dz \underset{\substack{z=\sin\varphi\\ dz=\cos\varphi\cdot dx}}{=} 2r^2\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi = 2r^2\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cdot d\varphi$$

Nebenrechnung:

$$\int\cos^2\varphi\cdot d\varphi = \int\cos\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi \underset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} \sin\varphi\cdot\cos\varphi - \int\sin\varphi\cdot(-\sin\varphi)\cdot d\varphi = \sin\varphi\cdot\cos\varphi + \int\underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi}\cdot d\varphi$$

$$= \sin\varphi\cdot\cos\varphi + \int\left(1 - \cos^2\varphi\right)\cdot d\varphi = \sin\varphi\cdot\cos\varphi + \varphi - \int\cos^2\varphi\cdot d\varphi = \int\cos^2\varphi\cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi\cdot\cos\varphi+\varphi=2\int\cos^2\varphi\cdot d\varphi \quad \Rightarrow \quad \int\cos^2\varphi\cdot d\varphi=\frac{1}{2}\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\varphi\cdot\frac{1}{2}$$

Fortsetzung:

$$A=2r^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot d\varphi=2r^2\cdot\left[\frac{1}{2}\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\frac{\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2r^2\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=r^2\cdot\pi$$

(8) Partielle Integration

$$\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx=\left[x\cdot e^x\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\cdot dx=\left(1\cdot e^1\right)-\left(0\cdot e^0\right)-\left[e^x\right]_0^1=e-\left(e^1-e^0\right)=1$$

(9) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\cdot dx=\left[x\cdot(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot(-\cos x)\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

2.4 Sätze der Integralrechnung

Satz 2.2

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx}$$

Bew: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=-\left(F(a)-F(b)\right)=-\int_a^b f(x)\,dx$

Satz 2.3

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx=0}$$

Bew: $\int_a^a f(x)\,dx=F(a)-F(a)=0$

Satz 2.4

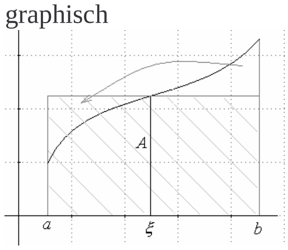
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx}$$

Bew: $\left(F(b)-F(a)\right)+\left(F(c)-F(b)\right)=F(c)-F(a)$

Satz 2.5

> Mittelwertsatz der Integralrechnung
> Sei $f(x)$ in $a\le x\le b$ integrierbar und stetig,
> dann existiert eine Zahl ξ mit $a\le\xi\le b$ mit $\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$

Bew: graphisch



$$A=\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$$

Satz 2.6

> Sei $f(x)$ integrierbar $\Rightarrow$ $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt=$ Stammfunktion zu $f(x)$

Bew: $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-\underbrace{F(a)}_{\text{const}}$

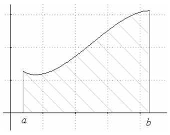
Beispiele:

$$g(x) = \int_0^x \left(t^3 - t\right) dt \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x^3 - x$$

$$g(x) = \int_0^1 \left(t^3 - t\right) dt \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 0$$

Satz 2.7

$$\boxed{\text{Sei } f(x) \text{ in } a \le x \le b \text{ stetig} \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ in } a \le x \le b \text{ integreibar}}$$

denn: 

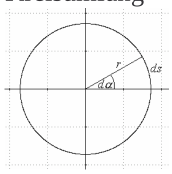
keine Sprünge
existiert Fläche $\Rightarrow$ integrierbar

Anmerkung:

stetig	$\Rightarrow$	integrierbar
differenzierbar	$\Rightarrow$	stegtig
differenzierbar	$\Rightarrow$	integrierbar
integrierbar	$\not\Rightarrow$	differenzierbar
stetig	$\not\Rightarrow$	differenzierbar

2.5 Anwendungen

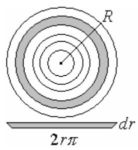
(1) Kreisumfang



$$ds = r \cdot d\alpha$$

$$\int_0^U ds = \int_0^{2\pi} r \cdot d\alpha \quad \Rightarrow \quad [s]_0^U = [r\alpha]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad U = 2\pi r$$

(2) Kreisfläche



Fläche Kreisring: $dA \approx 2r\pi \cdot dr$

$$\int_0^A dA = \int_0^R 2r\pi \cdot dr \quad \Rightarrow \quad A = 2\pi \frac{r^2}{2} = r^2\pi = A$$

(3) Kugelvolumen

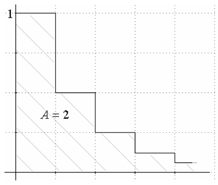
Kugelfläche: $A = 4\pi r^2$

$$dV \approx 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$\int_0^V dV = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 = V$$

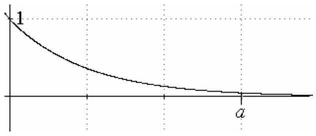
3 Uneigentliche Integrale

Bsp1:



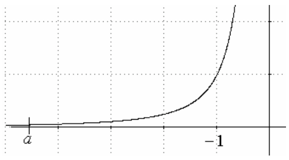
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2$$

Bsp2: $y=e^{-x}$



$$A=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx=\lim_{a\to\infty}\left[-e^{-a}\right]_0^a=\lim_{a\to\infty}\left[-e^{-a}-\left(-e^{-0}\right)\right]=\lim_{a\to\infty}\left[1-e^{-a}\right]=1=\int_0^\infty e^{-x}dx$$

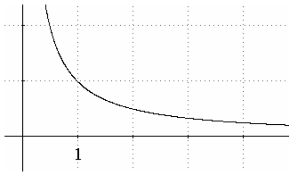
Bsp3: $y=\frac{1}{x^2}$



$$A=\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left[-x^{-1}\right]_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{-1}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left[\left(-\frac{1}{-1}\right)-\left(-\frac{1}{a}\right)\right]=1$$

Bsp4: $y=\frac{1}{x}$



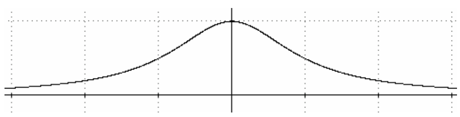
$$A=\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{dx}{x}=\lim_{a\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^a=\lim_{a\to\infty}\left[\ln a-\ln 1\right]=\infty$$

(divergent)

Def. 3.1

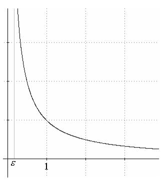
> Die Integrale
>
> $$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
>
> $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
>
> $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$$
>
> heißen uneigentliche Integrale 1. Art. Ein uneigentliches Integral heißt konvergent, falls der Grenzwert existiert. Andernfalls heißt es divergent.

Bsp5: $y=\frac{1}{1+x^2}$



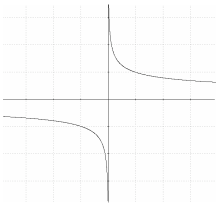
$$A=\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to\infty}\left[\arctan x\right]_{-a}^a=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Bsp6: Polstelle $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$



$$A=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}2\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0}2\left[1-\sqrt{\varepsilon}\right]=2$$

Bsp7: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$



$$A = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{\varepsilon}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}}dx + \int_{\varepsilon}^{8} x^{-\frac{1}{3}}dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{\varepsilon} + \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{\varepsilon}^{8}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{1}\right) + \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{64} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)\right] = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{64} = 4,5$$

Def. 3.2

Hat die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = c$ mit $a \le x \le b$ eine Polstelle, dann heißt $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right)$ uneigentliches Integral 2. Art. Es heißt konvergent, falls die Grenzwerte existieren. Andernfalls heißt es divergent.

Satz 3.1

$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^n \cdot dx = n! \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Bew: $\int_0^a e^{-x}x^n dx = \left[\left(-e^{-x}\right)x^n\right]_0^a - \int_0^a \left(-e^{-x}\right)nx^{n-1}dx$

$$\underset{a\to\infty}{\Rightarrow} \int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = n(n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx = n(n-1)(n-2)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-3}dx$$

$$= \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}x^0 dx}_{=1\,(\text{Bsp1})} = n!$$

Def. 3.3

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx = \Gamma(z) = \text{Gammafunktion}$$

Es gilt: $\Gamma(z) = (z-1)!$

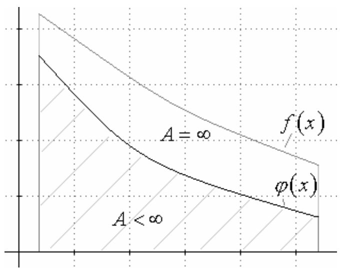
Satz 3.2

Konvergenzsatz

(1) $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ konvergent; $0 \le f(x) \le \varphi(x) \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent

(2) $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ divergent; $0 \le \varphi(x) \le f(x) \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent

Bew:



Bsp1: $\int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{x+1}dx$ konvergent?

$0 \le \dfrac{e^{-x}}{x+1} \le e^{-x}$ $\qquad \int_0^\infty e^{-x}dx$ konvergent $\Rightarrow \int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{x+1}dx$ konvergent

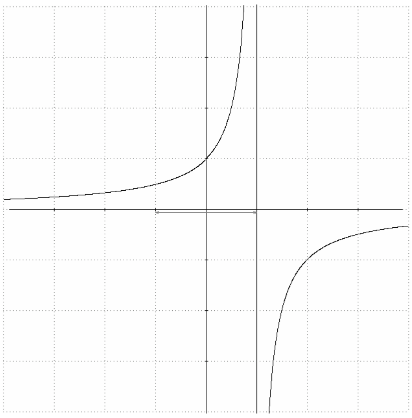
Bsp2: $\int_1^\infty \dfrac{2+\sin x}{x}dx$?

$\dfrac{1}{x} \le \dfrac{2+\sin x}{x}$ $\qquad \int_1^\infty \dfrac{dx}{x} = \infty \Rightarrow \int_1^\infty \dfrac{2+\sin x}{x}dx = \infty$

VI ANWENDUNGEN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

1 Taylor – Reihen

1.1 Potenzreihen



Bsp1: II, Abschnitt 4 $\Rightarrow \dfrac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+\ldots = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \quad (|q|<1)$

$$\Rightarrow \quad y = f(x) = \frac{1}{1-q} = 1+x+x^2+x^3+\ldots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \quad (|x|<1)$$

$= $ Potenzreihe für $f(x)$

Bsp2: $y = e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots \quad (-\infty < x < \infty)$

Bsp3: $y = \dfrac{1}{x}$

$$x = 1-z \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\ldots \quad (|z|<1)$$

$$= 1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\ldots$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (x-1)^j \quad (|x-1|<1)$$

Zusammenfassung:

$$y = \frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} (x-0)^j \quad (|x-0|<1)$$

$$y = \frac{1}{x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (x-1)^j \quad (|x-1|<1)$$

$$y = e^x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(x-0)^j \quad (-\infty < x < \infty)$$

allgemein:

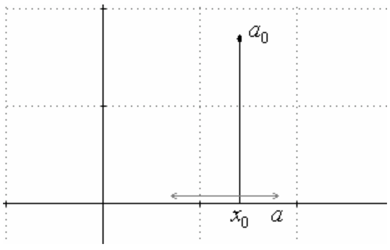
$$y = f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (x-x_0)^j = \text{Potenzreihe} \quad (|x-x_0|<a)$$

Def. 1.1

> Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (x-x_0)^j = f(x)$ heißt Potenzreihe. Wenn sie für $|x-x_0|<a$ konvergiert, heißt a Konvergenzradius
> sprechweise: $f(x)$ ist um x_0 entwickelbar

Bsp1: $y = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} (x-0)^j \quad (|x-0|<1)$

Bsp2: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = f(x)$



1.2 Taylor – Reihe

Bsp1: $y = e^x$ auf k Stellen berechnen Operationen: $+|-|\cdot|\div$

Ansatz:
$$y = e^x \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$
$$y' = e^x \approx a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$$
$$y'' = e^x \approx 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2$$
$$y''' = e^x \approx 6a_3 + 24a_4 x$$
$$y^{(4)} = e^x \approx 24a_4$$

$x = 0 \quad \Rightarrow$
$$y = e^0 = 1 = a_0 \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = 1$$
$$y' = e^0 = 1 = a_1 \qquad a_1 = 1$$
$$y'' = e^0 = 1 = 2a_2 \qquad a_2 = \frac{1}{2!}$$
$$y''' = e^0 = 1 = 6a_3 \qquad a_3 = \frac{1}{3!}$$
$$y^{(4)} = e^0 = 1 = 24a_4 \qquad a_4 = \frac{1}{4!}$$

$$\Rightarrow \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$
$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Bsp2: $\ln x$ auf k Stellen berechnen
$\ln x \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Ansatz:
$$y = \ln x \approx a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$$
$$y' = \frac{1}{x} \approx a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2} \approx 2a_2 + 6a_3(x-1)$$
$$y''' = \frac{2}{x^3} \approx 6a_3$$

$x = 1 \quad \Rightarrow$
$$y = \ln 1 = 0 = a_0 \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = 0$$
$$y' = \frac{1}{1} = 1 = a_1 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 1$$
$$y'' = -\frac{1}{1^2} = -1 = 2a_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = -\frac{1}{2}$$
$$y''' = \frac{2}{1^3} = 2 = 6a_3 \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$
$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

Allgemeine Herleitung:
$f(x)$ beliebig genau berechnen:

Ansatz:
$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3$$
$$f''(x) = 2a_2 + 3!a_3(x-x_0) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-x_0)^2$$
$$f'''(x) = 3!a_3 + 4!a_4(x-x_0)$$
$$f^{(4)}(x) = 4!a_4$$

Setze $x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$

$$f'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f'(x)}{1!}$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x_0) = 3!a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$f^{(4)}(x) = 4!a_4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$$

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Satz 1.1

> Satz von Taylor
>
> Vorraussetzung: $f(x)$ ∞ oft differenzierbar, um x_0 in Potenzreihe entwickelbar
>
> Behauptung: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
>
> $|x - x_0| < a$ und x_0 beliebig und $a = \infty$ möglich

Bsp1: $y = \frac{1}{1-x}$ Wähle $x_0 = 0$ $\left(\text{um } x_0 = 0 \text{ entwickeln}\right)$

$$y = (1-x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1$$

$$y' = (1-x)^{-2} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = 2(1-x)^{-3} \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 2$$

$$y''' = 3!(1-x)^{-4} \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 3!$$

Taylor-Reihe:

$$y = \frac{1}{1-x} = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Bsp2: $y = \sin x$ um $x_0 = 0$ entwickeln

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y(0) = 0$$

$$y' = \cos x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 0$$

$$y''' = -\cos x \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = -1$$

$$y^{(4)} = \sin x \quad \Rightarrow \quad y^{(4)}(0) = 0$$

$$\sin x = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \ldots$$

$$= 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \ldots$$

Satz 1.2

> Reihe von Mac Laurin
>
> Vorraussetzung: $f(x)$ ∞ oft differenzierbar, um x_0 in entwickelbar
>
> Behauptung: $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot x^j$

Bew: Taylorreihe für $x_0 = 0$

1.3 Potenzreihen der elementaren Funktionen

Satz 1.3

$$\boxed{e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad \text{für alle } x}$$

Bew: Mac Laurin (Satz 1.2)

$$f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j \underset{\left(f^{(j)}(0)=e^0=1\right)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$$

Folgerung:

$$e^1 = e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Satz 1.4

(1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

(2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Bew: (1) siehe Bsp2

(2) $$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Wähle $x_0 = 0$

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \ldots$$

$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1$

$y' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 0$

$y'' = -\cos x \quad \Rightarrow \quad y''(0) = -1$

$y''' = \sin x \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 0$

$y^{(4)} = \cos x \quad \Rightarrow \quad y^{(4)}(0) = 1$

$y^{(5)} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad y^{(5)}(0) = 0$

$$\underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \quad y(0) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \ldots$$

Bsp:
$$e^{jx} = 1 + (jx) + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 - jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)}_{\cos x} + j\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}_{\sin x}$$

Folgerung:
Satz 1.5

Eulersche Formel
$$\boxed{e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x}$$

Bsp: $y = \ln x$ für $x_0 = 0$ nicht möglich

Wähle $y = \ln(x+1)$

Satz 1.6

$$\boxed{\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots}$$

Bew: Wähle $x_0 = 0$

$y = \ln(x+1)$ $\quad y(0) = 0$

$y' = (x+1)^{-1}$ $\quad y'(0) = 1$

$y'' = -(x+1)^{-2}$ $\quad y''(0) = -1!$

$y''' = 2(x+1)^{-3}$ $\quad y'''(0) = 2!$

$y^{(4)} = -3!(x+1)^{-4}$ $\quad y^{(4)}(0) = -3!$

$$\ln(x+1) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Satz 1.7

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots}$$

Bew: für $x_0 = 0$ Ableitung berechnen, in Taylor-Reihe einsetzen

Bsp: $\tan\frac{\pi}{4} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{4} = \arctan(1) \;\Rightarrow\; \pi = 4\cdot\arctan(1) \;\Rightarrow\; \pi = 4\cdot\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right]$

Beispiele

(1) $\cos 0,7 = ?$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \underset{x=0,7}{=} 0,7648421$$

$$\underset{\text{exakt}}{=} 0,7648421$$

(2) $\ln 1,6 = \ln(1+0,6)$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \underset{x=0,6}{=} 0,475152$$

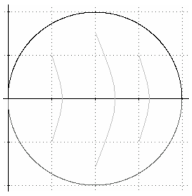
$$\underset{\text{exakt}}{=} 0,4700036$$

2 Rotationskörper

Def. 2.1

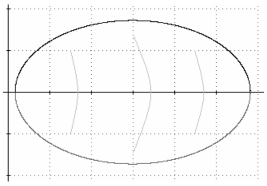
Es sei $y = f(x)$ für $a \le x \le b$ stetig und $y \ge 0$ für alle x.
Lässt man $f(x)$ um $x-$Achse rotieren, entsteht ein Rotationskörper.

Bsp1:



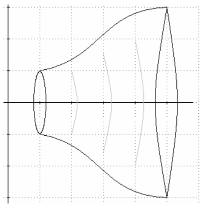
Halbkreis $\Rightarrow$ Kugel

Bsp2:



Ellipse $\Rightarrow$ Ellipsoid

Bsp3:



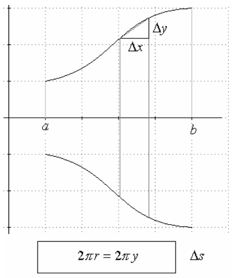
$y = f(x)$

Satz 2.1

Sei $y = f(x) \ge 0$ stetig in $a \le x \le b$

$$\Rightarrow \quad A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \text{Fläche des Rotationskörpers}$$

Bew:

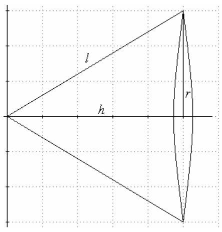


$$\Delta A = 2\pi y \cdot \Delta s = 2\pi y\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad dA = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_0^A dA = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Bsp1: Mantelfläche eines Kegels



$$y = ax + b = ax = \frac{r}{h} \cdot x$$

$$A = 2\pi\int_0^h y\sqrt{1+y'^2} \cdot dx = 2\pi\int_0^h \frac{r}{h} \cdot x\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}} \cdot dx = 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\int_0^h x \cdot dx$$

$$= 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = 2\pi\frac{r}{h} \cdot \frac{1}{h}\sqrt{h^2+r^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi \cdot r \cdot l = A$$

Bsp2: $y = \sqrt{x} \quad (0 \le x \le 1)$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

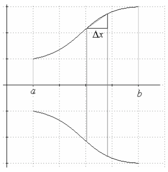
$$A = 2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2} \cdot dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}} \cdot dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x\left(1+\frac{1}{4x}\right)} \cdot dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}} \cdot dx$$

$$\underset{\substack{z=x+\frac{1}{4}\\ dz=dx}}{=} 2\pi\int_{0,25}^{1,25} z^{\frac{1}{2}} \cdot dz = 2\pi\frac{2}{3}\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_{0,25}^{1,25} = 2\pi\frac{2}{3}\left[1,25^{1,5} - 0,25^{1,5}\right] = 5,3304$$

Satz 2.2

> Sei $y = f(x) \geq 0$ stetig in $a \leq x \leq b$
>
> $\Rightarrow \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx =$ Volumen des Rotationskörpers

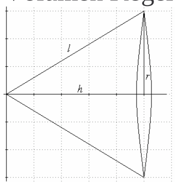
Bew:



$$\Delta V = r^2 \pi \cdot \Delta x = y^2 \pi \cdot \Delta x$$

$$\Delta x \text{ klein} \quad \Rightarrow \quad dV = \pi y^2 dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^A dV = \pi \int_0^A y^2 dx \quad \Rightarrow \quad V = \pi \int_0^A y^2 dx$$

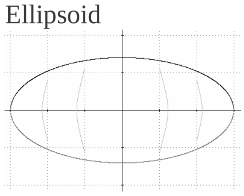
Bsp1: Volumen Kegel



$$y = ax + b \quad \Rightarrow \quad y = ax = \frac{r}{h} x$$

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

Bsp2: Ellipsoid

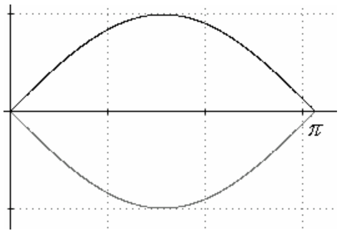


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi b^2 \left(\left[a - \frac{a^3}{3a^2} \right] - \left[-a + \frac{a^3}{3a^2} \right] \right) = \pi b^2 \frac{4}{3} a \qquad \left(a = b = r \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

Bsp3: $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$



$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \cdot dx = \pi \int_0^\pi \sin x \cdot \sin x \cdot dx = \pi \left[\sin x \cdot (-\cos x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x \cdot dx$$

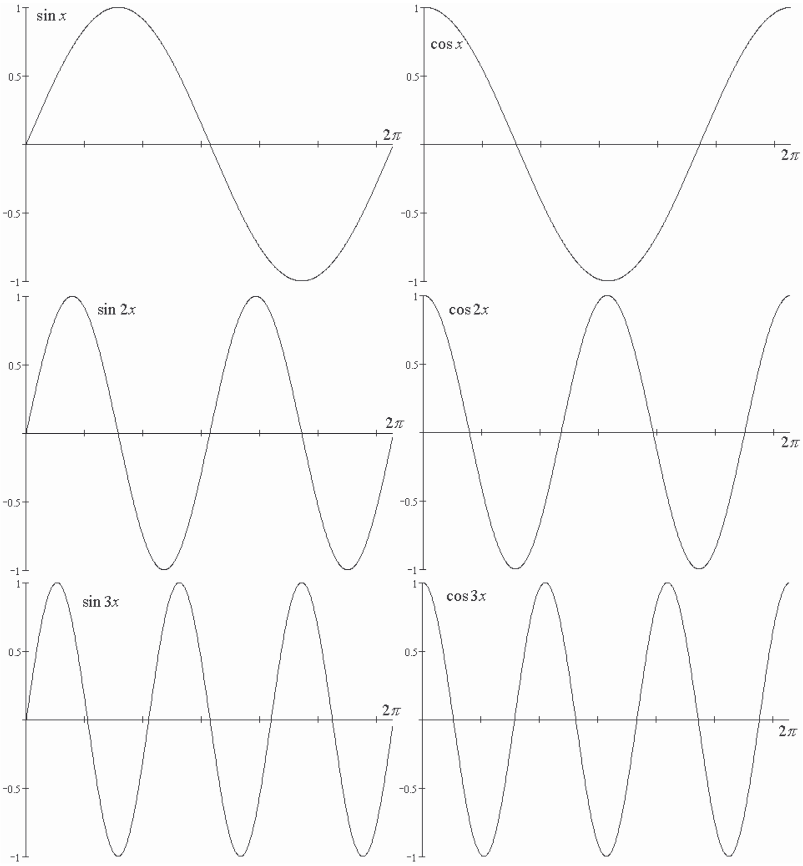
$$= \pi \int_0^\pi \left(1 - \sin^2 x\right) dx = \pi \cdot \left(\pi - \int_0^\pi \sin^2 x \cdot dx \right) = \pi^2 - \pi \int_0^\pi \sin^2 x \cdot dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \pi^2 = 2\pi \int_0^\pi \sin^2 x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi^2}{2}$$

3 Fourierreihen

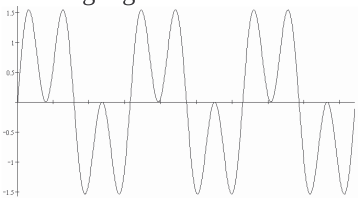
3.1 Einführung

Grund- und Oberschwingungen



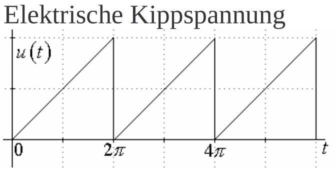
Fourieranalyse:
Darstellung eines beliebigen Schwingungsprozesses als Überlagerung obiger Grund- und Oberschwingungen
d.h. $f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$ (Fourierreihe)

Bsp1: Schwingung



Man ermittelt: $y = 4 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x$
Fourieranalyse $\Rightarrow$ $y = \sin x + \sin 3x$

Bsp2: Elektrische Kippspannung



Fourieranalyse $\Rightarrow$ $u(t) = \pi - 2 \cdot \sin t - \sin 2t - \frac{2}{3} \cdot \sin 3t - \frac{3}{4} \cdot \sin 4t - \frac{4}{3} \cdot \sin 5t - \ldots$

3.2 Trigonometrische Polynome

Hilfssatz1:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \cdot \sin kx \cdot dx = 0 \quad (j \neq k)$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \cdot \sin jx \cdot dx = \pi$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cdot \sin kx \cdot dx = 0$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cdot \sin kx \cdot dx = 0 \quad (j \neq k)$

(5) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cdot \cos jx \cdot dx = \pi$

(6) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \cdot dx = 0$

Bew: durch Partielle Integration beweisbar

Def. 3.1

> Die Funktion $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$ heißt trigonometrisches Polynom $n-$ten Grades

Bsp: $T_2(x) = 1 + \sin x + 3 \cdot \cos 2x$

Satz 3.1

> Die Funktion $f(x)$ sei in $-\pi \leq x \leq \pi$ darstellbar durch ein trigonometrisches Polynom,
>
> d.h. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$, dann gilt für die Koeffizienten a_k und b_k
>
> (1) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
>
> (2) $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \cdot dx$
>
> (3) $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \cdot dx \qquad$ (Fourierkoeffizienten)

Bew: (1) $f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots + b_n \sin nx$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot dx = a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cdot dx + \ldots + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots b_n \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

(2) $f(x) \cdot \cos x = \frac{a_0}{2} \cdot \cos x + a_1 \cdot \cos^2 x + a_2 \cos 2x \cdot \cos x + a_3 \cos 3x \cdot \cos x + \ldots + b_n \sin nx \cdot \cos x$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos x \cdot dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot dx}_{=0} + a_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot dx}_{=\pi} = a_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cdot \cos x \cdot dx}_{=0} + \ldots + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \sin nx \cdot dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos x \cdot dx = \pi a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos x \cdot dx$$

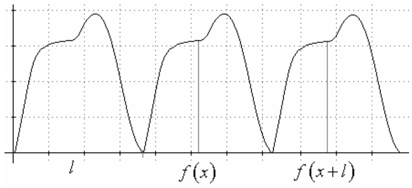
(restliche Koeffizienten analog)

3.3 Fourierreihen

Def. 3.2

> Die Funktion $f(x)$ heißt periodisch mit der Periode l, falls $f(x+l)=f(x)$ für alle x

Bsp1:



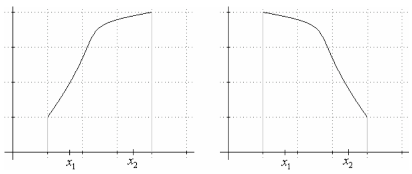
Bsp2: $y=\sin x$ Periode 2π
$y=\cos x$ Periode 2π
$y=\cos 3x$ Periode $\frac{2\pi}{3}$

Bsp3: trigonometrisches Polynom

Def. 3.3

> Die Funktion $f(x)$ heißt monoton, falls 2 Eigenschaften erfüllt sind
> entweder: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
> oder: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ für alle $x_1,\ x_2$

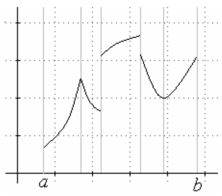
Bsp:



Def. 3.4

> Die Funktion $f(x)$ heißt im Intervall $a \leq x \leq b$ „stückweise monoton stetig“, falls das Intervall sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen lässt, so dass $f(x)$ in jedem Teilintervall monoton und stetig ist.

Bsp1:



Bsp2: $y=\sin x$

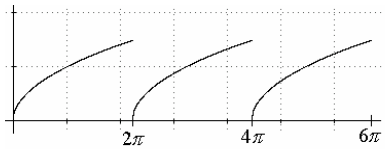
Bsp3: $y=\sin\frac{1}{x}$

Satz 3.2

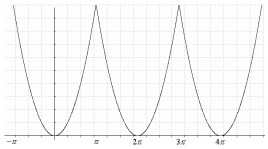
> Die Funktion $f(x)$ sei periodisch mit der Periode 2π und stückweise monoton stetig, dann gilt:
>
> $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\cdot\cos jx+b_j\cdot\sin jx\right) \qquad (\text{Fourierreihe}) \quad \text{mit}$$
>
> $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
>
> $$a_j=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos jx\cdot dx$$
>
> $$b_j=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin jx\cdot dx \qquad (\text{Fourierkoeffizienten})$$
>
> Die Reihe nimmt an den Sprungstellen das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte an.

Bew: Satz 3.1: $n\to\infty$

Bsp1:



Bsp2: $y = x^2$ für $-\pi \le x \le \pi$ mit periodischer Fortsetzung



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_1 \cdot \cos jx + bj \cdot \sin jx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi}\left(\pi^3 - \left(-\pi^3\right)\right) = \frac{1}{3\pi}2\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos jx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[x^2 \cdot \frac{\sin jx}{j}\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{\sin jx}{j} \cdot dx\right) = -\frac{2}{\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} k \cdot \sin jx \cdot dx$$

$$= -\frac{2}{\pi j}\left(\left[x \cdot \frac{\cos jx}{j}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos jx}{j} \cdot dx\right) = -\frac{2}{\pi j}\left[\left(\frac{\pi \cdot (-\cos j\pi)}{j} - \frac{(-\pi)(-\cos j(-\pi))}{j}\right) + \frac{1}{j}\left[\frac{\sin jx}{j}\right]_{-\pi}^{\pi}\right]$$

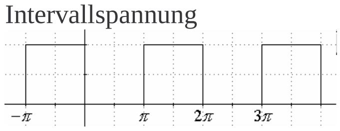
$$= -\frac{2}{\pi j^2}\left[-\pi \cdot \cos j\pi - \pi \cdot \cos j\pi\right] = \frac{2}{j^2} \cdot 2\cos j\pi = \frac{4}{j^2} \cdot \cos j\pi = \begin{cases} \dfrac{4}{j^2} & (j \text{ gerade}) \\ -\dfrac{4}{j^2} & (j \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin jx \cdot dx = 0$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe: $$y = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2}\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + \frac{4}{4^2}\cos 4x - \ldots$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \ldots\right]$$

Bsp3: Intervallspannung



$$y = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le \pi) \\ 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$ mit periodischer Fortsetzung

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_1 \cdot \cos jx + bj \cdot \sin jx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} y \cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} y \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1 \cdot dx + 0 = \frac{1}{\pi}\left[x\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\left[0 - (-\pi)\right] = 1$$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y \cdot \cos jx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1 \cdot \cos jx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin jx}{j}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi j}\left[\sin 0 - \sin(-j\pi)\right] = 0$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y \cdot \sin jx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1 \cdot \sin jx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-\cos jx)}{j}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi j}\left[-\cos 0 - \left(\underbrace{-\cos(-j\pi)}_{\cos x = \cos(-x)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi j}\left[-1 + \cos j\pi\right] = \begin{cases} 0 & (j \text{ gerade}) \\ -\dfrac{2}{\pi j} & (j \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe: $$y = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right]$$

Satz 3.3

Die Funktion $f(x)$ sei periodisch mit der Periode 2π und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cdot \cos jx + b_j \cdot \sin jx \right) \qquad (\text{Fourierreihe}) \quad \text{mit}$$

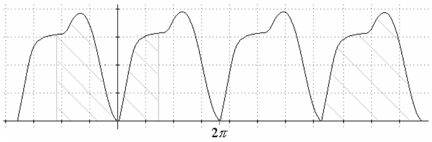
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \cos jx \cdot dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \sin jx \cdot dx \qquad (\text{Fourierkoeffizienten})$$

$a = -\pi \quad \Rightarrow \quad$ Satz 3.2

Bew: alle Funktionen 2π – periodisch



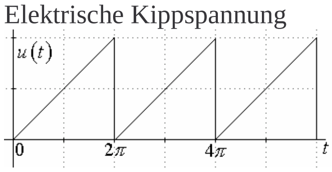
Formelsammlungen (oft)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos jx \cdot dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin jx \cdot dx$$

Bsp4: Elektrische Kippspannung



$u = t$

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cdot \cos jt + b_j \cdot \sin jt \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cdot dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \pi^2 \cdot 4 = 2\pi$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \cdot \cos jt \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cdot \cos t \cdot dt = \frac{1}{\pi} \left[\left[t \cdot \frac{\sin jt}{j} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin jt}{j} \cdot dt \right] = \frac{1}{\pi j} \left[\frac{\cos jt}{j} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi j^2} \left[\cos j \cdot 2\pi - \cos 0 \right] = \frac{1}{\pi j^2} (1 - 1) = 0$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \cdot \sin jt \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cdot \sin jt \cdot dt = \frac{1}{\pi} \left[\left[t \frac{(-\cos jt)}{j} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{(-\cos jt)}{j} \cdot dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(-2\pi \cdot \frac{\cos 2\pi j}{j} \right) - 0 + \frac{1}{j} \int_0^{2\pi} \cos jt \cdot dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{j} + \frac{1}{j} \left[\frac{\sin jt}{j} \right]_0^{2\pi} \right] = -\frac{2}{j}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Fourierreihe:} \quad u = \pi - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \cdot \sin jt = \pi - 2 \left[\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \ldots \right]$$

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

Satz 3.4

Die Funktion $f(x)$ sei periodisch mit der Periode T und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\cdot\cos(j\omega x)+b_j\cdot\sin(j\omega x)\right)\qquad (\text{Fourierreihe})\quad \text{mit}$$

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\,dx$$

$$a_j=\frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\cdot\cos(j\omega x)\cdot dx$$

$$b_j=\frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\cdot\sin(j\omega x)\cdot dx\qquad(\text{Fourierkoeffizienten})$$

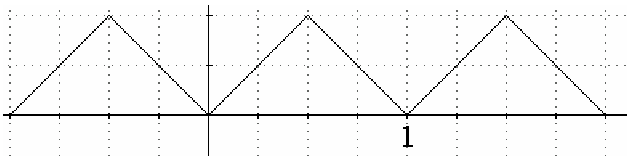
Bew: Sei $f(z)=\frac{a_0}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cdot\cos jz+b_j\cdot\sin jz\right)\quad(2\pi-\text{periodisch})$

$$z=\frac{2\pi x}{T}\quad\Rightarrow\quad f\left(\frac{2\pi x}{T}\right)=\hat{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cdot\cos\left(j\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)+b_j\cdot\sin\left(j\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)\right)\qquad\left(\frac{2\pi}{T}=\omega\right)$$

$\hat{f}(x)=T-\text{periodisch}$

Intergrale durch die Subtitution $z=\frac{2\pi x}{T}$ überführbar

Bsp5:



$$y=\begin{cases}x & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)\\(1-x) & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cdot\cos(j\omega x)+b_j\cdot\sin(j\omega x)\right)\quad T=1\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$$

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^1 y\cdot dx=2\left[\int_0^{0,5}x\cdot dx+\int_{0,5}^{1}x\cdot dx\right]=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a_j=\frac{\omega}{\pi}\int_0^1 y\cdot\cos(j\omega x)\cdot dx=2\left[\int_0^{0,5}x\cdot\cos(j2\pi x)\,dx+\int_{0,5}^{1}(1-x)\cdot\cos(j2\pi x)\,dx\right]=\begin{cases}0 & (j\ \text{gerade})\\-\frac{2}{\pi^2 j^2} & (j\ \text{ungerade})\end{cases}$$

$$b_j=\frac{\omega}{\pi}\int_0^1 y\cdot\sin(j\omega x)\cdot dx=2\left[\int_0^{0,5}x\cdot\sin(j2\pi x)\,dx+\int_{0,5}^{1}(1-x)\cdot\sin(j2\pi x)\,dx\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad\text{Fourierreihe:}\quad y=\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\cos(1\cdot 2\pi x)}{1^2}+\frac{\cos(3\cdot 2\pi x)}{3^2}+\frac{\cos(5\cdot 2\pi x)}{5^2}+\dots\right]$$

3.4 Gerade und ungerade Funktionen

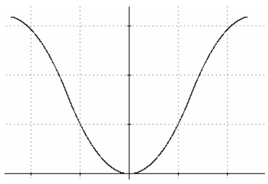
Def. 3.5

(1) $f(x)$ ist eine gerade Funktion, wenn $f(x)=f(-x)$ ist

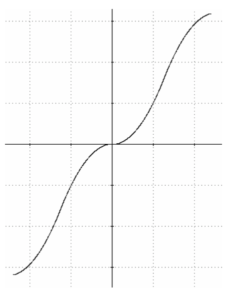
(2) $f(x)$ ist eine ungerade Funktion, wenn $f(x)=-f(-x)$ ist

Beispiele

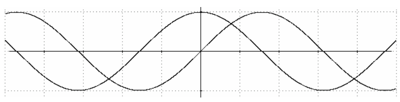
(1) gerade



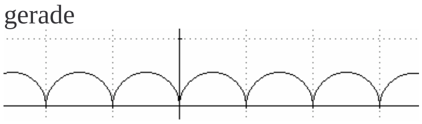
(2) ungerade



(3) $\cos x=\text{gerade};\quad \sin x=\text{ungerade}$



(4) gerade



Satz 3.5

Die Funktion $f(x)$ sei gerade in $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$, Periode T und stückweise monoton stetig, dann gilt:

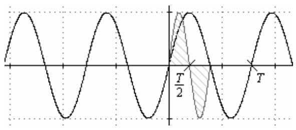
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \cos(j\omega x) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \quad \text{mit}$$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x) \cdot \cos(j\omega x) \cdot dx = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(j\omega x) \cdot dx$$

Bew: $f(x)$ gerade $\Rightarrow$ $f(x) = f(-x)$ $\underset{x \Rightarrow x + \frac{T}{2}}{\Rightarrow}$ $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f\left(-x - \frac{T}{2}\right) \underset{\text{periodisch}}{=} f\left(-x - \frac{T}{2} + T\right) = f\left(-x + \frac{T}{2}\right)$

$f\left(\frac{T}{2} + x\right) = f\left(\frac{T}{2} - x\right)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ symmetrisch zu $\frac{T}{2}$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $b_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \underbrace{f(x) \cdot \sin(j\omega x) \cdot dx}_{=0}$ $\Rightarrow$ Fläche $= 0$ $\Rightarrow$ $b_j = 0$

Satz 3.6

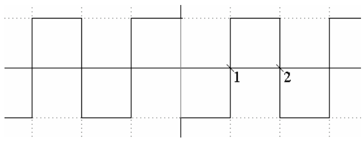
Die Funktion $f(x)$ sei ungerade in $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$, Periode T und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \sin(j\omega x) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \quad \text{mit}$$

$$b_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x) \cdot \sin(j\omega x) \cdot dx = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(j\omega x) \cdot dx$$

Bew: analog zu Beweis von Satz 3.5

Bsp:



$$y = \begin{cases} 1 & (-1 \le x \le 0) \\ -1 & (0 \le x \le 1) \end{cases} \qquad (\text{mit periodischer Fortsetzung})$$

ungerade $\Rightarrow$ $f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \sin(j\omega x)$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$b_j = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(j\omega x) \cdot dx = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 (-1) \cdot \sin(j\omega x) \cdot dx = -2\int_0^1 \sin(j\omega x) \cdot dx$$

$$= -2\left[\frac{-\cos(j\pi x)}{j\pi}\right]_0^1 = -\frac{2}{j\pi}\left[-\cos j\pi - (-\cos 0)\right] = -\frac{2}{j\pi}\left[-\cos j\pi + 1\right] = \begin{cases} 0 & (j \text{ gerade}) \\ -\frac{4}{\pi j} & (j \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe: $\Rightarrow$ $y = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin 1\pi x}{1} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \ldots\right]$

4 Die Regeln von de l'Hospital

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^3}=?$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

Satz 4.1

> Die Regel von de l'Hospital
> Vorraussetzung: $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ differenzierbar
> $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ beide ungleich Null
> $\varphi(x)\to 0$ und $\psi(x)\to 0$ für $x\to a$
> Behauptung: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$

Bew: (verkürzt) Setze $\varphi(a)=\psi(a)=0$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}\underset{\substack{\text{Mittelwertsatz}\\\text{Diff.rechnun}}}{=}\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)(x-a)}{\psi'(\eta)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Mittelwertsatz: $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\varphi'(\xi)$

Anmerkung: $a=\pm\infty$ zugelassen

Beispiele:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-0}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x}}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x\cdot\ln 3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x\cdot\ln 3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x(\ln 3)^2}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x(\ln 3)^3}{6}=\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

Anmerkung:
Die Regel von de l'Hopital gilt auch für $\varphi(x)\to\infty$ und $\psi(x)\to\infty$

5 Die Integration rationaler Funktionen

(Partialbruchzerlegung)

Rationale Funktionen: $\varphi(x)=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_0}$

gesucht: $\int \varphi(x)\,dx$

5.1 Integration von Grundfunktionen

Satz 5.1

$$\boxed{\int \frac{A}{(x-a)^m}\cdot dx = \begin{cases} A\dfrac{(x-a)^{1-m}}{1-m} & (m\neq 1) \\ A\cdot \ln|x-a| & (m=1)\end{cases}}$$

Bew: Fall 1 $m\neq 1$:

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^m} \underset{\substack{z=x-a\\dz=dx}}{=} A\int z^{-m}\cdot dz = A\frac{z^{1-m}}{1-m} = A\frac{(x-a)^{1-m}}{1-m}$$

Fall 2 $m=1$:

$$A\int\frac{dx}{x-a} \underset{\substack{z=x-a\\dz=dx}}{=} \int\frac{dz}{z} = A\cdot\ln|z| = A\cdot\ln|x-a|$$

Satz 5.2

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad (b^2-4ac<0)$$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{2ax+b} \qquad (b^2-4ac=0)$$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| \qquad (b^2-4ac>0)$$

Bew: $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} \underset{x=\frac{t-b}{2a}\ \Leftrightarrow\ t=2ax+b}{=} 2\int\frac{dt}{t^2-(b^2-4ac)}$$

Fall1: $$2\int\frac{dt}{t^2-\underbrace{(b^2-4ac)}_{=-s^2}} = 2\int\frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{2}{s^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{s}\right)^2+1} \underset{\substack{u=\frac{t}{s}\\du=\frac{1}{s}}}{=} \frac{2}{s^2}\cdot s\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{s}\arctan u = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

Fall2: $$2\int\frac{dt}{t^2-(b^2-4ac)} = 2\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} = -\frac{2}{2ax+b}$$

Fall3: $$2\int\frac{dt}{t^2-(b^2-4ac)} \underset{b^2-4ac=s^2}{=} 2\int\frac{dt}{t^2-s^2} = 2\int\frac{dt}{(t-s)(t+s)} = \frac{2}{2s}\int\frac{\overbrace{\frac{(t+s)-(t-s)}{(t+s)^2}}^{\varphi'(x)}}{\underbrace{\frac{t-s}{t+s}}_{\varphi(x)}}\cdot dt$$

$$= \frac{2}{2s}\cdot\ln|\varphi(x)| = \frac{2}{2s}\cdot\ln\left|\frac{t-s}{t+s}\right| = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|$$

Satz 5.2

$$\boxed{\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\cdot dx = \frac{A}{2a}\cdot\ln|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}}$$

Bew: $$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{ax^2+bx+c}$$ $\Rightarrow$ durch Bruchrechnen

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\cdot dx = \frac{A}{2a}\cdot\ln|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Bsp: $\int \frac{2x+1}{x^2+4x-2}\cdot dx = ?$ $\qquad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\cdot dx$ mit $\begin{bmatrix} A=2 \\ B=1 \\ a=1 \\ b=4 \\ c=-2 \end{bmatrix}$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x-2}\cdot dx = \frac{A}{2a}\cdot \ln|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{2\cdot 1}\ln|x^2+4x-2| + \left(1-\frac{2\cdot 4}{2\cdot 1}\right)\int \frac{dx}{x^2+4x-2}$$

$$\underset{\substack{\text{Satz 5.2} \\ b^2-4ac=24}}{=} \ln|x^2+4x-2| - 3\cdot \frac{1}{\sqrt{24}}\cdot \ln\left|\frac{2x+4-\sqrt{24}}{2x+4+\sqrt{24}}\right| + c$$

5.2 Integration rationaler Funktionen

5.2.1 Polynome (III, Kapitel 2.5)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_2)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)$$

$$= a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_p)^{k_p} = \text{Faktorzerlegung}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & k_1-\text{fache Nullstelle} \\ \alpha_2 & k_2-\text{fache Nullstelle} \\ \ldots\ldots & \end{bmatrix}$$

Bsp: $P_5(x) = x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 5x^2 = (x-1)^2(x-5)^1(x-0)^2$

5.2.2 Partialbruchzerlegung

gegeben: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ = rationale Funktion $\qquad n < m$

$Q_m(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_p)^{k_p} \qquad a_j$ = reell

dann:
$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha_1)^3} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}$$
$$+ \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \frac{B_3}{(x-\alpha_2)^3} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha)^{k_2}}$$
$$+\ldots\ldots$$
$$+ \frac{C_1}{x-\alpha_p} + \frac{C_2}{(x-\alpha_p)^2} + \frac{C_3}{(x-\alpha_p)^3} + \ldots + \frac{C_{k_p}}{(x-\alpha)^{k_p}}$$

Berechnung der Konstanten $A_k, B_k, \ldots$ durch:
rechte Seite auf gemeinsamen Hauptnenner bringen und Koeffizienten vergleichen

Bsp1: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-0)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-0} = \frac{A_1(x-1)x + A_2 x + B_1(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot x}$

$$= \frac{A_1x^2 - A_1x + A_2x + B_1x^2 - B_1 2x + B_1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2\underbrace{[A_1+B_1]}_{=1} + x\underbrace{[-A_1+A_2-2B_1]}_{=0} + \underbrace{B_1}_{=1}}{x^3-2x^2+x} \overset{!}{=} \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$$

$$\begin{bmatrix} A_1+B_1 = 1 \\ -A_1+A_2-2B_1 = 0 \\ B_1 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} B_1 = 1 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}$$

Bsp2: $y=\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1}{x+1}=\frac{A_1(x+1)+B_1(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x[A_1+B_1]+A_1-B_1}{x^2-1}\overset{!}{=}\frac{3x-1}{x^2-1}$

$$\begin{bmatrix} A_1+B_1=3 \\ A_1-B_1=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1=1 \\ B_1=2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$$

Bsp3: $y=\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}=\frac{A_1(x-1)^3+B_1(x-1)^2\cdot x+B_2(x-1)\cdot x+B_3x}{x(x-1)^3}$

$$=\frac{A_1\left(x^3-3x^2+3x-1\right)+B_1\left(x^2-2x+1\right)x+B_2\left(x^2-x\right)+B_3x}{x(x-1)^3}$$

$$=\frac{x^3[A_1+B_1]+x^2[-3A_1-2B_1+B_2]+x[3A_1+B_1-B_2+B_3]-A_1}{x(x-1)^3}\overset{!}{=}\frac{x+1}{x(x-1)^3}$$

$$\begin{bmatrix} A_1+B_1=0 \\ -3A_1-2B_1+B_2=0 \\ 3A_1+B_1-B_2+B_3=1 \\ A_1=-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1=-1 \\ B_1=1 \\ B_2=-1 \\ B_3=2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

Bsp4: $y=\frac{x-4}{x^3-4x}=\frac{x-4}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{x-4}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$

$$=\frac{x^2[A+B+C]+x[2B-2C]-4A}{x^3-4x}\overset{!}{=}\frac{x-4}{x^3-4x}$$

$$\begin{bmatrix} A+B+C=0 \\ 2B-2C=1 \\ -4A=-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-0,25 \\ C=-0,75 \end{matrix}$$

$$\frac{x-4}{x^3-4x}=\frac{1}{x}-\frac{0,25}{x-2}-\frac{0,75}{x+2}$$

Division zweier Polynome:

(1)

$$\begin{array}{l} 137:4=34+\frac{1}{4} \\ \underline{12} \\ \ \ 17 \\ \ \ \underline{16} \\ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{l} \left(x^2-2x+1\right):(x-3)=x+1+\frac{4}{x-3} \\ \underline{x^2-3x} \\ \qquad x+1 \\ \qquad \underline{x-3} \\ \qquad\quad 4 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{l} \left(x^4+\ x^3+\ \ x^2\right):(x+7)=x^3-6x^2+43x-301+\frac{2107}{x+7} \\ \underline{x^4+7x^3} \\ \quad -6x^3+\ \ x^2 \\ \quad \underline{-6x^3-43x^2} \\ \qquad\qquad 42x^2 \\ \qquad\qquad \underline{42x^2+301x} \\ \qquad\qquad\quad -301x \\ \qquad\qquad\quad \underline{-301x-2107} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 2107 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{l} \left(x^5-7x^4+11x^3-5x^2\right):\left(x^2-2x+1\right)=x^3-5x^2 \\ \underline{x^5-2x^4+\ \ x^3} \\ \quad -5x^4+10x^3-5x^2 \\ \quad \underline{-5x^4+10x^3-5x^2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

5.2.3 Integration rationaler Funktionen

Problem : $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \cdot dx = ?$

P_n, Q_m sind Polynome mit Grad n, m

(1) Wenn $n \geq m \Rightarrow$ man dividiere $P_n(x) : Q_m(x)$ und erhält $P_n(x) : Q_m(x) = S_k(x) + \frac{R_i(x)}{Q_m(x)}$

(2) Man führe für $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ bzw. $\frac{R_i(x)}{Q_m(x)}$ eine Partialbruchzerlegung durch

(3) Man integriere alle Summanden

Bsp1: $\int \frac{3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - x} \cdot dx = ?$

(1)
$$\begin{array}{l} \left(3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1\right) : \left(x^2 - x\right) 3x^2 + x + \frac{2x-1}{x^2-x} \\ \underline{3x^4 - 3x^3} \\ \quad x^3 - x^2 + 2x - 1 \\ \quad \underline{x^3 - x^2} \\ \qquad\quad 2x - 1 \end{array}$$

(2) Partialbruchzerlegung für $\frac{2x-1}{x^2-x}$

$$\frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{x(A+B)-A}{x^2-x} \overset{!}{=} \frac{2x-1}{x^2-x}$$

$$\begin{bmatrix} A+B=2 \\ A=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

(3) $$\int \frac{3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - x} \cdot dx = \int \left[3x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right] dx = x^3 + \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \ln|x-1| + c$$

Bsp2: $\int \frac{4x+1}{x^3 + 4x^2 + 4x} \cdot dx = ?$

(1) entfällt

(2) $$\frac{4x+1}{x^3+4x^2+4x} = \frac{4x+1}{x\left(x^2+4x+4\right)} = \frac{4x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B_1 x(x+2) + B_2 x}{x(x+2)^2}$$

$$= \frac{A\left(x^2+4x+4\right) + B_1\left(x^2+2x\right) + B_2 x}{x(x+2)^2} = \frac{x^2\left[A+B_1\right] + x\left[4A + 2B_1 + B_2\right] + 4A}{x(x+2)^2} \overset{!}{=} \frac{4x+1}{x(x+2)^2}$$

$$\begin{bmatrix} A + B_1 = 0 \\ 4A + 2B_1 + B_2 = 4 \\ 4A = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0,25 \\ B_1 = -0,25 \\ B_2 = 3,5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{4x+1}{x^3+4x^2+4x} = \frac{0,25}{x} - \frac{0,25}{x+2} + \frac{3,5}{(x+2)^2}$$

(3) $$\int \frac{4x+1}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx = 0,25\int \frac{dx}{x} - 0,25\int \frac{dx}{x+2} + 3,5\underbrace{\int \frac{dx}{(x+2)^2}}_{\int z^{-2}dz} = 0,25 \cdot \ln|x| - 0,25 \cdot \ln|x+2| - 3,5 \cdot \frac{1}{x+2} + c$$

Bsp3: $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{x^3 - 4x} \cdot dx = ?$

(1)
$$\begin{array}{l} \left(x^3 + 4x + 2\right) : \left(x^3 - 4x\right) = 1 + \frac{8x+2}{x^3-4x} \\ \underline{x^3 - 4x} \\ \quad 8x + 2 \end{array}$$

(2) $$\frac{8x+2}{x^3-4x}=\frac{8x+2}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{8x+2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)(x+2)+B(x+2)x+C(x-2)x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{A\left(x^2-4\right)+B\left(x^2+2x\right)+C\left(x^2-2x\right)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{x^2[A+B+C]+x[2B-2C]-4A}{x(x-2)(x+2)}\overset{!}{=}\frac{8x+2}{x^3-4x}$$

$$\begin{bmatrix} A+B+C=0 \\ 2B-2C=8 \\ -4A=2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=-0,5 \\ B=\frac{9}{4} \\ C=-\frac{7}{4} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x+1}{x^3+4x^2+4x}=-\frac{0,5}{x}+\frac{\frac{9}{4}}{x-2}-\frac{\frac{7}{4}}{x+2}$$

(3) $$\int\frac{x^3+4x+2}{x^3-4x}\cdot dx=\int\left[1-\frac{0,5}{x}+\frac{\frac{9}{4}}{x-2}-\frac{\frac{7}{4}}{x+2}\right]dx=x-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{9}{4}\ln|x-2|-\frac{7}{4}\ln|x+2|+c$$

Bsp4: $\int\frac{dx}{x^2-1}=?$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x[A+B]+[A-B]}{x^2-1}\overset{!}{=}\frac{1}{x^2-1}$$

$$\begin{bmatrix} A+B=0 \\ A-B=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=0,5 \\ B=-0,5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1}=\frac{0,5}{x-1}-\frac{0,5}{x+1}$$

5.2.4 Partialbruchzerlegung bei komplexen Nullstellen

1. Rückblick

$P_n(x)$ habe Nullstelle $z=a+bj \quad \Rightarrow$
$P_n(x)$ hat Nullstelle $\overline{z}=a-bj$

$\Rightarrow$ Faktorzerlegung

$P_n(x)=a_n\left(x-\alpha_1\right)^{k_1}\cdot\left(x-\alpha_2\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-z)\cdot(x-\overline{z}) \qquad (z$ einfache Nullstelle$)$

es gilt: $(x-z)\cdot(x-\overline{z})=\left[x-(a+bj)\right]\cdot\left[x-(a-bj)\right]=[x-a-bj]\cdot[x-a+bj]$

$$=\left[x^2-ax+bxj-ax+a^2-abj-bjx+abj-b^2j^2\right]=x^2-\underbrace{2a}_{-p}x+\underbrace{\left(a^2+b^2\right)}_{q}=x^2+px+q$$

$\Rightarrow$ Faktorzerlegung

$$P_n(x)=a_n\left(x-\alpha_1\right)^{k_1}\cdot\left(x-\alpha_2\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(x^2+px+q\right)}_{z,\overline{z}}$$

2. Partialbruchzerlegung

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=\left(x-\alpha_1\right)^{k_1}\cdot\left(x-\alpha_2\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+px+q\right)$$

mit α_j: reel; x^2+px+q hat Nullstelle $z,\overline{z}$ (komplex)

$\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung für $y=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{\left(x-\alpha_1\right)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{\left(x-\alpha_1\right)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\alpha_2}+\frac{B_2}{\left(x-\alpha_2\right)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-\alpha)^{k_2}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{Rx+S}{x^2+px+q}$$

Berechnung der Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich

Bsp1: $y = \dfrac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1} = \dfrac{3x^2-2}{(x+1)(x^2+x+1)}$

$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{3}{4}} \cdot j$

Ansatz: $y = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Rx+S}{x^2+x+1} = \dfrac{A(x^2+x+1)+(Rx+S)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{Ax^2+Ax+A+Rx^2+Rx+Sx+S}{x^3+2x^2+2x+1}$

$$= \frac{x^2[A+R]+x[A+R+S]+[A+S]}{x^3+2x^2+2x+1} \overset{!}{=} \frac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1}$$

$$\begin{bmatrix} A+R=3 \\ A+R+S=0 \\ A+S=-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} S=-3 \\ A=1 \\ R=2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+x+1}$$

3. Integration von $y = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$

> P_n hat 2 einfache komplexe Nullstellen $z, \overline{z}$
>
> (1) Wenn $n \geq m \quad \Rightarrow$ man dividiere $P_n(x) : Q_m(x)$ und erhält $P_n(x) : Q_m(x) = U_k(x) + \dfrac{V_i(x)}{Q_m(x)}$
>
> (2) Man führe für $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ bzw. $\dfrac{V_i(x)}{Q_m(x)}$ eine Partialbruchzerlegung durch
>
> (3) Man integriere alle Summanden

Bsp2: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1} = ?$

(1) entfällt

(2) $\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{1}{(x^2-1)\underbrace{(x^2+1)}_{\pm j}} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Rx+S}{x^2+1}$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Rx+S)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+(Rx^3-Rx+Sx^2-S)}{x^4-1}$$

$$= \frac{x^3[A+B+R]+x^2[A-B+S]+x[A+B-R]+(A-B-S)}{x^4-1} \overset{!}{=} \frac{1}{x^4-1}$$

$$\begin{bmatrix} A+B+R=0 \\ A-B+S=0 \\ A+B-R=0 \\ A-B-S=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=0,25 \\ B=-0,25 \\ R=0 \\ S=-0,5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^4-1} = \frac{0,25}{x-1} - \frac{0,25}{x+1} - \frac{0,5}{x^2+1}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\left[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right] - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4}[\ln|x-1| - \ln|x+1|] - \frac{1}{2}\arctan x + c$

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

VII DIFFERENTIALRECHNUNG VON FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

1 Funktionen in zwei Variablen

1.1 Grundlagen

bisher: $y = f(x) \qquad x \to y \quad (\text{Zuordnung})$

jetzt: $z = f(x,y) \quad (x,y) \to z \quad (\text{Zuordnung})$

Bsp: $z = x^2 + y^2 \qquad (1,1) \to 2$

$(2,1) \to 5$

Def. 1.1

> Sei $E = \{(y,x) \mid x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}\}$ (Ebene) $D \subseteq E$
> Jedem Punkt $(x,y) \in D$ werde eindeutig eine reelle Zahl z zugeordnet,
> dann heißt die Zuordnung eine Funktion von x, y
> symbolisch: $z = f(x,y)$ oder $z = f(x,y)\ldots$
> D = Definitionsbereich der Funktion
> x, y = unabhängige Variablen (Argument)
> Die Menge aller z – Werte: Wertebereich

Beispiele:

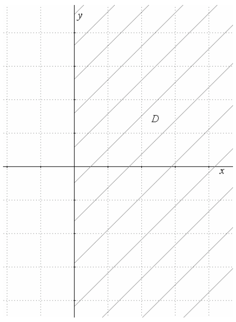
(1) $w = \sqrt{x \cdot y^2}$ Zuordnung: $(1,1) \to 1$

$(0,0) \to 0$

$(1,2) \to 2$

$(2,4) \to \sqrt{32}$

$(-1,1) \to ?$



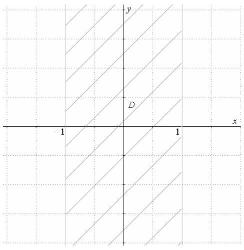
Definitionsbereich: $D = \{(x,y) \mid x \geq 0; \quad y \in \mathbb{R}\}$

Wertebereich: $\{w \mid w \in \mathbb{R}; \quad w \geq 0\}$

(2) $z = y - \arctan x$

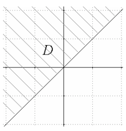
$\arcsin x = u \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$

$D = \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}; \quad -1 \leq x \leq 1\}$



(3) $u = g(x,y) = x^2 + y^2 - 3 \qquad D = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Ebene}$

(4) $w = \sqrt{y - x}$ muß gelten: $y - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq x \qquad D = \{(x,y) \mid x \geq y\}$



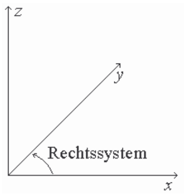
(5)

x	y	z
0	1	0
1	0	1
0	0	2
1	1	0

$(x,y) \to z$

1.2 Koordinatensysteme

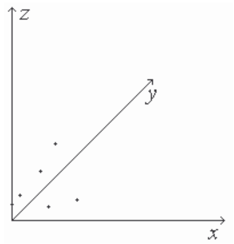
1.2.1 Kartesische Koordinaten



$(x, y) \to z$

Bsp1: $z = 3x + y$

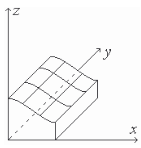
x	y	z
0	0	0
1	0	3
0	1	1
2	0	6
0	2	2
1	1	4



$\Rightarrow$ Ebene

Bsp2: $z = 1 \quad \Rightarrow$ Ebene parallel zur $x, y-$Ebene mit Abstand 1

Bsp3: $z = f(x, y)$



Bsp4: $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

(1) Punkte $(x, y, 0) =$ Schnitt der Fläche mit $x - y -$Ebene

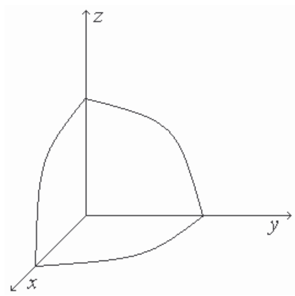
$z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4^2$

(2) Punkte $(0, y, z) =$ Schnitt der Fläche mit $y - z -$Ebene

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{16 - y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = 16 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 + z^2 = 4^2$

(3) Punkte $(x, 0, z) =$ Schnitt der Fläche mit $x - z -$Ebene

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{16 - x^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = 16 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = 4^2$



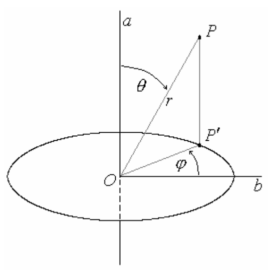
(Kugel)

Satz 1.1

> Eine Fläche im $x - y - z -$Koordinatensystem stellt im Allgemeinen eine Funktion $z = f(x, y)$ dar.

1.2.2 Kugelkoordinaten (Räumliche Polarkoordinaten)

Darstellung eines Punktes im Raum:



(1) $r =$ Abstand zum Nullpunkt

(2) $\theta =$ Winkel der Strecke $\overline{OP}$ mit der Achse a

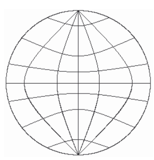
(3) $\varphi =$ Winkel zwischen Achse b mit $\overline{OP'}$

Bsp1: Erdoberfläche

$r =$ konstant

$\theta =$ Breitenkreise

$\varphi =$ Längengrade

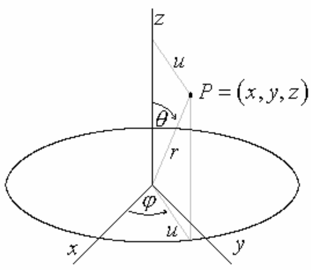


$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten



(1) $\cos\theta = \dfrac{z}{r} \quad\Rightarrow\quad z = r\cdot\cos\theta$

(2) $\sin\theta = \dfrac{u}{r} \quad\Rightarrow\quad u = r\cdot\sin\theta$

$\cos\varphi = \dfrac{x}{u} \quad\Rightarrow\quad x = u\cdot\cos\varphi = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$

(3) $\sin\varphi = \dfrac{y}{u} \quad\Rightarrow\quad y = u\cdot\sin\varphi = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$

$\Rightarrow$ Umrechnungsformeln

$$x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$$
$$z = r\cdot\cos\theta$$

Bsp2: $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

$$r\cdot\cos\theta = \sqrt{16 - r^2\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi - r^2\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi} \quad\Rightarrow\quad r^2\cdot\cos^2\theta = 16 - r^2\cdot\sin\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

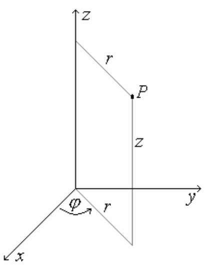
$$\Rightarrow\quad r^2\cdot\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 16 \quad\Rightarrow\quad r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4^2 \qquad r = 4$$

Bsp3: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \qquad (\text{Ellipsoid})$

$$\frac{1}{4}r^2\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi + \frac{1}{4}r^2\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi + \frac{1}{16}r^2\cdot\cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}r^2\cdot\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \frac{1}{16}r^2\cdot\cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow\quad 4r^2\cdot\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = 16 \quad\Rightarrow\quad r^2\left(4\cdot\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = 16 \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt{\frac{16}{4\cdot\sin^2\theta + \cos^2\theta}}$$

1.2.3 Zylinderkoordinaten



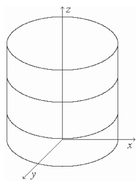
(x, y) – Ebene in Polarkoordinaten
z – Koordinate bleibt

Umrechnung

$$x = r\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$
$$z = z$$

Bsp1: $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\cos\varphi = r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) - 2r\cos\varphi = r^2 - 2r\cos\varphi$

Bsp2: $r = z$



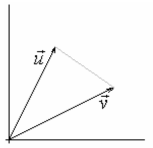
1.3 Stetigkeit

(1) $z = f(x,y) =$ Funktion

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow z = f(\vec{u})$$

(2) Sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \text{Abstand}$$



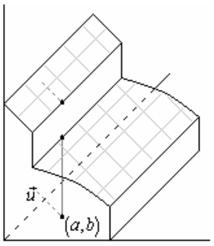
Def. 1.2

(1) $f(x,y)$ heißt im Punkt (a,b) stetig, falls für $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gilt:

$f(\vec{u}) \to f(\vec{w})$ falls $|\vec{u} - \vec{w}| \to 0$

(2) $f(x,y)$ heißt stetig, falls $f(x,y)$ für alle Punkte des Definitionsbereichs stetig ist.

Bsp1:



Bsp2: Eine Landschaft ohne Sprünge ist stetig

2 Differentialrechnung für Funktionen in zwei Variabeln

2.1 Partielle Ableitung

Def. 2.1

gegeben: Funktion $f(x,y)$

(1) Die Ableitung von $f(x,y)$ nach x wobei y als Konstante betrachtet wird, heißt partielle Ableitung von $f(x,y)$ nach x.

Symbol: $f_x(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

(2) Die Ableitung von $f(x,y)$ nach y wobei x als Konstante betrachtet wird, heißt partielle Ableitung von $f(x,y)$ nach y.

Symbol: $f_y(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

(3) $f(x,y)$ heißt differenzierbar, falls beide Ableitungen existieren.

Beispiele:

(1) $f(x,y)=x^3+y^2-2xy \quad\Rightarrow\quad f_x(x,y)=3x^2-2y \qquad f_y(x,y)=2y-2x$

(2) $I=\dfrac{U}{R} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial I}{\partial U}=\dfrac{1}{R} \qquad \dfrac{\partial I}{\partial R}=-UR^{-2}=-\dfrac{U}{R^2}$

(3) $s(u,v)=v\cdot\sin u-v^2 \quad\Rightarrow\quad s_u=v\cdot\cos u \qquad s_v=\sin u-2v$

(4) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}-y\cdot\cos x-x^2 \quad\Rightarrow\quad f_x=\dfrac{1}{y}+y\cdot\sin x-2x \qquad f_y=-\dfrac{x}{y^2}-\cos x$

Satz 2.1

Sei $f(x,y)$ differenzierbar $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

Bew: IV, Def 1.2: $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\Rightarrow$ Satz 2.1

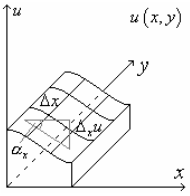
Bsp: $z=\sqrt{x+\sin y}=(x+\sin y)^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}(x+\sin y)^{-\frac{1}{2}} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}(x+\sin y)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos y$

Die Ableitungen als Steigungen

Funktion $u(x,y)$

$$u_x=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}\approx\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}\underset{\substack{x+h=x_2\\x=x_1}}{=}\frac{u(x_2,y)-u(x_1,y)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

$$u_y=\lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}\approx\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}\underset{\substack{y+h=y_2\\y=y_1}}{=}\frac{u(x,y_2)-u(x,y_1)}{y_2-y_1}=\frac{\Delta_y u}{\Delta y}$$



$u_x\approx\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}=$ Steigung in $x-$Richtung

$u_y\approx\dfrac{\Delta_y u}{\Delta y}=$ Steigung in $y-$Richtung

Satz 2.2

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ist die Steigung von u in $x-$Richtung (Tangenz des Steigungswinkels)

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ist die Steigung von u in $y-$Richtung (Tangenz des Steigungswinkels)

Def. 2.2

Höhere Ableitungen

$$u = u(x,y) \quad \Rightarrow \quad (u_x)_x = u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(u_y)_y = u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(u_x)_y = u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$(u_y)_x = u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$$

$$(u_{xx})_x = u_{xxx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}$$

$$(u_{xx})_y = u_{xxy}$$

usw.

Bsp1: $u(x,y) = x^2 - x \cdot \sin y$

$u_x = 2x - \sin y$

$u_y = -x \cdot \cos y$

$u_{xx} = 2$

$u_{yy} = x \cdot \sin y$

$u_{xy} = -\cos y$

$u_{yx} = -\cos y$

$u_{xxy} = 0$

Bsp2: $z = x + y^2$

$z_x = 1$

$z_y = 2y$

$z_{xy} = 0$

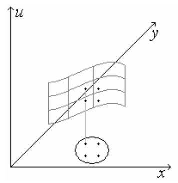
$z_{yx} = 0$

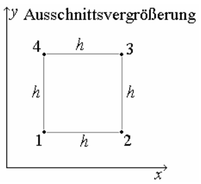
Satz 2.3

Satz von Schwarz (1873)

Sei $u(x,y)$ zweimal differenzierbar $\quad \Rightarrow \quad u_{xy} = u_{yx}$

Bew:





$$\frac{u_4 - u_3}{h} \approx u_x(3) \qquad \frac{u_2 - u_1}{h} \approx u_x(1)$$

$$\frac{u_4 - u_2}{h} \approx u_y(2) \qquad \frac{u_3 - u_1}{h} \approx u_y(1)$$

$$\frac{u_x(3) - u_x(1)}{h} \approx x_{xy} \qquad \frac{u_y(2) - u_y(1)}{h} \approx u_{yx}$$

einsetzen:

$$x_{xy} \approx \frac{u_x(3) - u_x(1)}{h} = \frac{\frac{u_4 - u_3}{h} - \frac{u_2 - u_1}{h}}{h} = \frac{u_4 - u_3 - u_2 + u_1}{h^2}$$

$$u_{yx} \approx \frac{u_y(2) - u_y(1)}{h} = \frac{\frac{u_4 - u_2}{h} - \frac{u_3 - u_1}{h}}{h} = \frac{u_4 - u_2 - u_3 + u_1}{h^2}$$

Bsp: $u = x^2 + y^3 x + 3$

$u_x = 2x + y^3 \qquad u_{xy} = 3y^2$

$u_y = 3y^2 x \qquad u_{yx} = 3y^2$

Satz 2.4

Satz von Schwarz

Es sei $u(x,y)$ beliebig oft differenzierbar. Die Bildung der höheren Ableitung $u_{x\ldots y\ldots y\ldots x\ldots}$ ist von der Reihenfolge der vorzunehmenden Differentiationen unabhängig.

d.h. $\quad u_{xxy} = u_{xyx} = u_{yxx} \neq u_{yyx}$

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

Bew: (1) $u_{xy} = u_{yx}$ (klar)

(2) $u_{xxy} = (u_x)_{xy} = (u_x)_{yx} = u_{xyx} = (u_{xy})_x = (u_{yx})_x = u_{yxx}$

usw.

Bsp: $u = e^{2x+y} - x^2 y = e^{2x} \cdot e^y - x^2 y$

$u_x = 2e^{2x}e^y - 2xy$

$u_y = e^{2x}e^y - x^2$

$u_{xy} = 2e^{2x}e^y - 2x$

$u_{yx} = 2e^{2x}e^y - 2x$

$u_{xyy} = 2e^{2x}e^y$

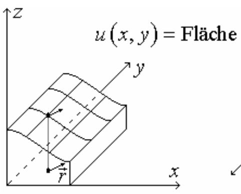
$u_{yxy} = 2e^{2x}e^y$

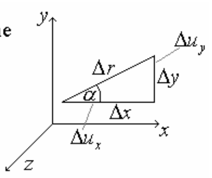
$u_{xyyx} = 4e^{2x}e^y$

$u_{xyxy} = 4e^{2x}e^y$

usw.

2.2 Die Richtungsableitung





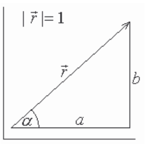
$\Delta u = \Delta u_x + \Delta u_y$

$u_x \approx \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \Delta_x u \approx u_x \cdot \Delta x$

$u_y \approx \dfrac{\Delta_y u}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad \Delta_y u \approx u_y \cdot \Delta y$

$\Rightarrow \quad \Delta u = \Delta u_x + \Delta u_y = u_x \cdot \Delta x + u_y \cdot \Delta y$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta r} = u_x \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta r} + u_y \cdot \dfrac{\Delta y}{\Delta r} = \cos\alpha \cdot u_x + \sin\alpha \cdot u_y = \dfrac{du}{dr} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dr} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$



$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \operatorname{grad}(u) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dt} = \vec{r} \cdot \operatorname{grad}(u)$

Def. 2.3

> Gradient
>
> $u(x, y)$ differenzierbar $\Rightarrow$ $\operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$

Satz 2.5

> Richtungsableitung
>
> Sei $u(x, y)$ differenzierbar und $\vec{r}$ eine beliebige Richtung um $\mathbb{R}^2$ mit $|\vec{r}| = 1$, dann ist:
>
> $\dfrac{du}{dr} = \vec{r} \cdot \operatorname{grad}(u)$ die Ableitung (Steigung) in Richtung $\vec{r}$

Bsp1: Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=3x^2y-2xy+1$. Wie groß ist die Ableitung von $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ im Punkt $(1,1)$ und wie groß ist der Steigungswinkel?

$$\operatorname{grad}(u)=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6xy-2y\\3x^2-2x\end{pmatrix}\underset{(1,1)}{=}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{|\vec{r}\,|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\frac{du}{dr_0}=\vec{r}_0\cdot\operatorname{grad}(u)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 6=2,68$$

Steigungswinkel: $\tan\alpha=\frac{du}{dr_0}=2,68 \quad\Rightarrow\quad \alpha=68,8°$

Bsp2: Die Ebene $v(x,y)=3x-6yx$ schneidet die $x-y-$Ebene. Gesucht ist der Schnittwinkel.

(1) Schnittkurve (Gerade)

$$z=0=3x-6y \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x$$

(2) Vektor $\perp$ Schnittkurve

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{s}_\perp=\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{r}_0=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

(3) Richtungsableitung in Vektorrichtung

$$\frac{dv}{dr_0}=\vec{r}_0\cdot\operatorname{grad}(v)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}=\frac{-15}{\sqrt{5}}=-6,71 \quad\Rightarrow\quad \tan\alpha=-6,71 \quad\Rightarrow\quad \alpha=-81,52°$$

Bsp3: $u(x,y)=u=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ gesucht: Schnittwinkel mit $x-y-$Ebene

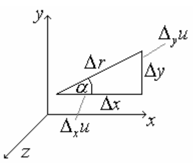
(1) $z=0=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad\Rightarrow\quad y=-x$

(2) $\vec{s}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \perp \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{r}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(3) $$\frac{du}{dr_0}=\vec{r}_0\cdot\operatorname{grad}(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2}=1$$

$$\Rightarrow\quad \tan=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=45°$$

2.3 Das totale Differential



$$z=u(x,y)$$

$$\Delta u=\Delta_x u+\Delta_y u$$

$$u_x\approx\frac{\Delta_x u}{\Delta x} \quad\Rightarrow\quad \Delta_x u\approx u_x\cdot\Delta x$$

$$u_y\approx\frac{\Delta_y u}{\Delta y} \quad\Rightarrow\quad \Delta_y u\approx u_y\cdot\Delta y$$

$$\Rightarrow\quad \Delta u\approx u_x\cdot\Delta x+u_y\cdot\Delta y \quad\Rightarrow\quad du=u_x dx+u_y dy$$

Def. 2.4

> $du=u_x dx+u_y dy$ $\quad(dx, dy$ kleine Zahlen$)$ heißt "vollständiges" oder "totales Differential" und gibt näherungsweise die Zunahme der Funktion $u(x,y)$ an bei Übergang von (x,y) nach $(x+dx, y+dy)$ $($Höhendifferenz$)$

Bsp1: Zylinder: $r = 2,3cm \quad h = 5,4cm$

Die Werte des Zylinders werden mit einem Messfehler von $0,01cm$ gemessen. Wie wirken sich die Messfehler auf die Volumenberechnung aus?

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

$dV = V_r dr + V_h \cdot dh = 2r\pi h \cdot dr + r^2\pi \cdot dh = 2 \cdot 2,3 \cdot 3,14 \cdot 5,4 \cdot 0,01 + 2,3^2 \cdot 3,14 \cdot 0,01 = 0,95cm^3$

(Fehlerrechnung)

Bsp2: Elektrisch leitender Draht

gemessen: 300Ω Widestand | Messfehler $0,1\Omega$

$220V$ Spannung | Messfehler $0,5V$

Stromstärke $= I = \frac{U}{R}$; $dI = ?$

$$dI = \frac{\partial I}{\partial U} dU + \frac{\partial I}{\partial R} dR = \frac{1}{R} \cdot dU - \frac{U}{R^2} \cdot dR = \frac{1}{300} \cdot 0,5 - \frac{220}{300^2} \cdot 0,1 = 0,002A$$

2.4 Implizite Funktion

Bsp1: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ = Kugel (Halbkugel)

gesucht: Schnittkurve mit $x - y -$ Ebene

$\Rightarrow \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$

Bsp2: $f(x, y) = 3x - y$

Schnittkurve: $f = 0 = 3x - y \quad \Rightarrow \quad y = 3x$

Darstellung einer Kurve im $x - y -$ Koordinatensystem

(1) explizit: $y = f(x) \quad [\text{Bsp: } y = 3x]$

(2) implizit: $\underbrace{F = (x, y) = 0}_{\text{Schnittkurve}} \quad [\text{Bsp: } y - 3x = 0]$

Bsp3: $3x^2 y - 6xy^2 + y^3 x^2 - 3yx^4 = 0$

Satz 2.6

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(x, y) = 0 & \text{Kurve (implizit)} \\ \Rightarrow \quad y' = -\frac{F_x}{F_y} & (F_y \neq 0) \end{array}}$$

Bew: $dF = F_x dx + F_y dy \underset{\substack{dF=0 \\ F=0}}{=} \quad \Rightarrow \quad F_y dy = -F_x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = y'$

Bsp1: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad$ (Kreis)

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Bsp2: $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

Bsp3: $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)$

$F(x, y) = y - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-f'(x)}{1} = f'(x)$

2.5 Extremwertaufgaben

Bsp: Landschaft im Raum: Bergspitze ist Maxima; Tal ist Minima
Maximum von $u(x,y) = \text{"Bergspitze"}$
Minimum von $u(x,y) = \text{"Tal"}$

Maximum (1) $u_x = 0;\quad u_y = 0$ (2) Die Eigenwerte λ der Matrix $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} < 0$
Minimum (1) $u_x = 0;\quad u_y = 0$ (2) Die Eigenwerte λ der Matrix $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} > 0$

Bsp1: $u(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 2x = 0 \\ u_y &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2 > 0 \Rightarrow \text{min}$$

Bsp2: $u(x,y) = x^2 - x \cdot y + y^2 + 12x - 9y + 1$ gesucht: Extrema

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 2x - y + 12 = 0 \Rightarrow 2x - y = -12 \\ u_y &= -x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow -x + 2y = 9 \end{aligned}\right\} \underset{\text{CRAMER}}{\Rightarrow} x = \frac{\begin{vmatrix} -12 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-24+9}{3} = -5 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}}{3} = \frac{18-12}{3} = 2$$

Bei $x = -5;\ y = 2$: Extrenum?

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{Eigenwerte}}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3 \mid \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_j > 0 \Rightarrow$ min In $(-5, 2)$ existiert ein Minimum

3 Funktionen in n Variablen

3.1 Definitionen und Beispiele

bisher: $z = f(x, y) =$ Fläche

jetzt: $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

Bezeichnung: $(x, y) =$ Punkt im $\mathbb{R}^2$ (zweidimensionaler Raum)

$(x, y, z) =$ Punkt im $\mathbb{R}^3$ (dreidimensionaler Raum)

$(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) =$ Punkt im $\mathbb{R}^n$ ($n-$dimensionaler Raum)

Def. 3.1

> Es sei D eine Menge $n-$dimensionale Punkte (d.h. $D \subseteq \mathbb{R}^n$). Jedem Punkt $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ werde eindeutig eine reelle Zahl z zugeordnet, d.h. $x_1, x_2, \dots x_n \to z \in \mathbb{R}$. Dann heißt z eine Funktion von $x_1, \dots x_n$.
> Symbol: $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ oder $g = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$
> $D =$ Definitionsbereich
> $x_1, x_2, x_3, \dots x_n =$ Argumente (unabhängige Variable)
> $z =$ abhängige Variable
> Die Menge aller $z-$Werte bilden den Wertebereich

Beispiele:

(1) $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

(2) $w = (x - y)\sin z - z^2$

(3) $r = uv - u^2$

(4) $p = f(x, y, z, t)$ (Druck)

3.2 Partielle Ableitung

Def. 3.2

> gegeben: $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$
> Die Ableitung von $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ nach x_j, wobei alle anderen Variablen als Konstanten betrachtet werden, heißt partielle Ableitung nach x_j.
> Symbol: $\dfrac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)}{\partial x_j}$ oder $f_{x_j}(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

(5) $w = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5$

$\dfrac{\partial w}{\partial x_1} = x_2 x_3 = w_{x_1}$ $\qquad \dfrac{\partial w}{\partial x_2} = x_1 x_3 + x_3 x_4 = w_{x_2}$ $\qquad$ usw.

(6) $z = s^2 - 2ts + t^3 - v$

$z_s = 2s - 2t$ $\qquad z_t = -2s + 3t^2$ $\qquad z_v = -1$

Satz 3.1

> Sei $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ nach x_j differrenzierbar
> $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1, x_2, \dots x_j + h, \dots x_n) - f(x_1, x_2, \dots x_n)}{h} =$ Differenzenquotient

Bew: folgt aus IV, Def 1.2

Def. 3.3

> Höhere Ableitungen
> Sei $z = f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)$ nach allen Variablen beliebig oft differenzierbar
> $$\Rightarrow \quad \left[f_{x_j}\right]_{x_k} = f_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$
> $$\left[f_{x_j x_k}\right]_{x_p} = f_{x_j x_k x_p} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_p}$$

Bsp: $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \cdot x + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2yx$$

Satz 3.2

> Satz von Schwarz
> Sei $z = f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)$ nach allen Variablen beliebig oft differenzierbar. Dann ist die Bildung der gemischten Ableitungen $f_{x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \dots x_{j_n}}\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)$ von der Reihenfolge der vorzunehmenden Differentiationen unabhängig.

Bew: $f_{x_m x_n} = f_{x_n x_m}$ (Satz 2.3)

$$f_{x_m x_n x_p} = \left[f_{x_m x_n}\right]_{x_p} = \left[f_{x_n x_m}\right]_{x_p} = f_{x_n x_m x_p} = \left[f_{x_n}\right]_{x_m x_p} = \left[f_{x_n}\right]_{x_p x_m} = \dots$$

Bsp: $u = (x - y) \cdot z = xz - yz$

$u_x = z$

$u_y = -z$

$u_z = (x - y)$

$u_{xy} = 0 = u_{yx}$

$u_{zx} = 1 = u_{xz}$

usw.

3.3 Der Gradient

Def. 3.4

> $f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)$ differenzierbar
> $$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{Gradient von } f)$$

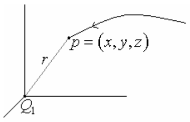
Bsp1: $u = x^2 - y^2 - 2zxy$

$$\operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2zy \\ -2y - 2zx \\ -2yx \end{pmatrix}$$

Bsp2: Hydromechanik

gegeben: Flüssigkeit mit dem Druck $p(x,y,z)$

$\vec{F}$ = Kraft auf $1cm^3$ Flüssigkeit (z.B. Auftrieb) $\Rightarrow \quad F = grad(p) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Bsp3: 

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \text{elektrostatisches Potential}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(x,y,z) = \vec{E} = \text{grad}(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\right] = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = -\frac{Q_1\cdot x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\Phi_y = -\frac{Q_1\cdot y}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\Phi_z = -\frac{Q_1\cdot z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E = |\vec{E}| = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

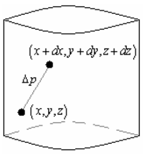
3.4 Das totale Differential

$u(x,y) \quad \Rightarrow \quad du = u_x dx + u_y dy \quad$ (totales Differential (Def. 2.4))

Def. 3.5

> $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ differenzierbar
>
> $\Rightarrow \quad df = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot dx_j \quad$ (dx_j kleine Zahlen) heißt totales Differential
>
> $\left[df \approx \Delta f = \text{Zunahme von } f = f(x_1+dx, x_2+dx_2, \ldots x_n+dx_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)\right]$

Bsp1: Behälter mit Flüssigkeit



$p(x,y,z) = \text{Druck}$

$\Delta p \approx dp = p_x dx + p_y dy + p_z dz$

Bsp2: Ein Geschoss werde mit dem Winkel φ zur Horizontalen abgeschossen.

$W_{(\text{Wurfweite})} = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin 2\varphi \qquad (v_0 = \text{Anfangsgeschwindigkeit}) \quad (\text{Luftreibung vernachlässigt})$

Werte: $\quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2} \quad \text{Fehler} \le 0{,}01$

$\varphi = 30° \pm 1° \simeq \frac{\varphi}{6} \pm \frac{\varphi}{180}$

$v_0 = 50\frac{m}{s} \pm 2\frac{m}{s}$

$\Delta W \approx dW = ?$

$$W = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin 2\varphi = \frac{2500}{2\cdot 9{,}81}\cdot\sin\frac{\varphi}{3} = 110{,}35m$$

Fehler: $$dW = \frac{\partial W}{\partial g}dg + \frac{\partial W}{\partial v_0}dv_0 + \frac{\partial W}{\partial \varphi}d\varphi = \left(-\frac{{v_0}^2}{2g^2}\cdot\sin 2\varphi\right)dg + \left(\frac{v_0}{g}\sin 2\varphi\right)dv_0 + \left(\frac{{v_0}^2}{g}\cos 2\varphi\right)d\varphi$$
$$= -\frac{50^2}{4\cdot 9,81^2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot 0,01 + \frac{50}{9,81}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot 2 + \frac{50^2}{9,81}\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{180} = 10,996m$$
$$W = (110,35 \pm 10,996)\,m$$

3.5 Richtungsableitung

Wiederholung:

$u(x,y) \Rightarrow u_x = \text{Steigung in } x-\text{Richtung}$

$u_y = \text{Steigung in } y-\text{Richtung}$

$u_z = \text{Steigung in } z-\text{Richtung}$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \vec{r}\cdot\text{grad}(u) = \text{Steigung in } r-\text{Richtung}$

jetzt: $f(x_1, x_2, \dots x_n)$

totales Differential: $df = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + \dots f_{x_n}dx_n$

$$\Rightarrow dr = \sqrt{{dx_1}^2 + {dx_2}^2 + \dots {dx_n}^2} \qquad (dr = \text{Abstand der Punkte})$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dr} = f_{x_1}\frac{dx_1}{dr} + f_{x_2}\frac{dx_2}{dr} + \dots f_{x_n}\frac{dx_n}{dr} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dr} \\ \frac{dx_2}{dr} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dr} \end{pmatrix} = \vec{r}\cdot\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}$$

Folgerung:

Satz 3.2

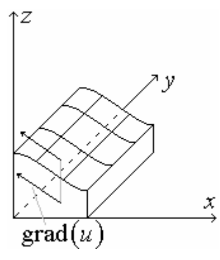
gegeben: $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{r}| = 1$

$\Rightarrow$ Die Ableitung von $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ in Richtung $\vec{r}$ ist $\boxed{\frac{\partial f}{\partial r} = \vec{r}\cdot\text{grad}(f)}$

Anmerkung:

gegeben: $u(x_1, x_2, \dots x_n)$

$\text{grad}(u)$ zeigt als Vektor stets in die Richtung des stärksten Anstiegs von $u(x_1, x_2, \dots x_n)$



3.6 Extremwertaufgaben

$$\text{Extrenum}\begin{cases}\text{Maximum} = \text{Maximaler Wert von } f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)\\ \text{Minimum} = \text{Minimaler Wert von } f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)\end{cases}$$

$$f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right) \text{ habe Extrenum} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

gegeben: $f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n\right)$

$$A = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & j_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} = \text{Matrix der zweiten Ableitungen}$$

dann gilt:

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \\ \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ}\end{matrix}\right\} \quad \text{Maximum}}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \\ \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv}\end{matrix}\right\} \quad \text{Minimum}}$$

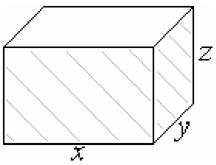
Bsp1: Die Funktion $p\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 5$ gebe den Druck eines Gases im Punkt $\left(x, y, z\right)$ an.
An welchen Stellen ist der Druck extremal?

$$\begin{matrix} p_x = 2x - 2 = 0 & & x = 1 & & \\ p_y = 2y - 4 = 0 & \Rightarrow & y = 2 & \Rightarrow & \text{in } \left(1, 2, 0\right) \text{ Extrenum} \\ p_z = 2z = 0 & & z = 0 & & \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left(2-\lambda\right)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Bsp2: Eine Kiste, die $1m^3$ fassen soll und oben offen ist, soll so ausgelegt werden, dass der Materialverbrauch minimal ist.



Fläche: $A = x \cdot y + 2xz + 2yz = \text{Min}$

Nebenbedingung: $V = x \cdot y \cdot z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{x \cdot y}$

$$\Rightarrow \quad A = x \cdot y + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x \cdot y} + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{x \cdot y} = x \cdot y + \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = \text{Min}$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 \cdot y = 2 \\ x \cdot y^2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 y = 2 \\ x^2 y^4 = 4 \end{matrix} \Rightarrow y^3 = 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2} \qquad \Rightarrow \sqrt[3]{2} - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

$x = 1,26$

$y = 1,26$

$z = \frac{1}{x \cdot y} = 0,63$

$$M = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^{-3} & 1 \\ 1 & 4x^{-3} \end{pmatrix} \underset{(1,26|1,26)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(2-\lambda\right)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

VIII MEHRFACHE INTEGRALE

1 Zweifache Integrale

1.1 Einführung

Bsp1: $u(x,y) = 3x^2 - 4y$

$$\int_0^1 u(x,y)\,dx = \int_0^1 \left(3x^2 - 4y\right)dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 4yx\right]_0^1 = 1 - 4y = f(y)$$

$$\int_a^b u(x,y)\,dx = F(y)$$

Bsp2: $s(x,y) = 3x^2 - y$

$$\int_0^1 \left(3x^2 - y\right)dx = \left[3x^2 y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 3x^2 - \frac{1}{2} = f(x)$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x\right]_0^2 = 7$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(3x^2 - y\right)dy\right)dx = \int_0^2 \int_0^1 \left(3x^2 - y\right)dy \cdot dx = 7$$

Def. 1.1

> Ein zweifaches Integral ist gegeben durch $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy \cdot dx$.
>
> Dabei wird das innere Integral zuerst ausgerechnet.

Bsp3: $\int_0^1 \int_{-1}^2 \left(x^2 - 3xy + y\right)dx \cdot dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}y + yx\right]_{-1}^2 dy = \int_0^1 \left(\left(\frac{8}{3} - 6y + 2y\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}y - y\right)\right)dy = \int_0^1 (-1{,}5y + 3)\,dy$

$$= \left[-\frac{3}{2}\frac{y^2}{2} + 3y\right]_0^1 = \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{2} + 3\right) = 2{,}25$$

Bsp4: $\int_0^1 \int_0^2 dy \cdot dx = \int_0^1 [y]_0^2\,dx = \int_0^1 2dx = [2x]_0^1 = 2$

Bsp5: variable Grenzen

sei $u(x,y) = x \cdot y$

$$\int_0^1 \int_{-x}^{\sqrt{x}} u(x,y)\,dy \cdot dx = \int_0^1 \int_{-x}^{\sqrt{x}} xy \cdot dy \cdot dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\frac{\sqrt{x}^2}{2} - x \cdot \frac{x^2}{2}\right)dx$$

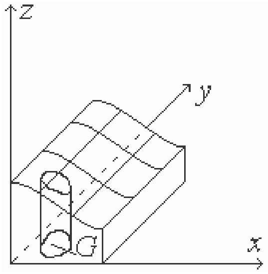
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

Bsp6: $\int_0^1 \int_0^{y+1} (x-y)\,dx \cdot dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - yx\right]_0^{y+1} \cdot dy = \int_0^1 \left(\frac{(y+1)^1}{2} - y(y+1)\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(y^2 + 2y + 1\right) - y^2 - y\right)$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\right)dy = \left[\frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

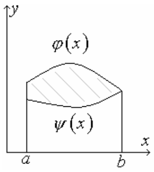
1.2 Volumenberechnung in kartesischen Koordinaten

Problem: $u(x,y)$



Man teile auf der $x-y-$Ebene ein Gebiet G ab
und projeziere vom Rand des Gebiets auf $u(x,y)$ (siehe Abb.)
Man erhält einen zylinderförmigen Körper. Das Volumen dieses Körpers ist gesucht.

Das Gebiet G habe folgende Gestalt (Normalgebiet)

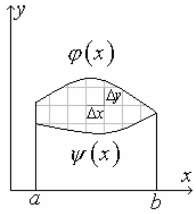


$$\psi(x) \le \varphi(x)$$

Satz 1.1

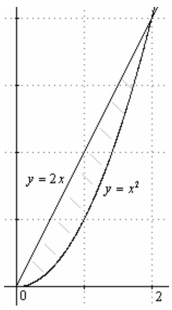
> Volumenberechnung
>
> Das Volumen vom Normalgebiet G ausgeschnittenem Körpers (Abb) beträgt:
>
> $$V = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} u(x,y)\, dy \cdot dx$$

Bew:



$$V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot u(x_1, y_1) + \Delta x \cdot \Delta y \cdot u(x_1, y_2) + \Delta x \cdot \Delta y \cdot u(x_1, y_2) + \ldots \quad (\text{Summe aller Säulen})$$
$$= \Delta x \cdot \sum_j u(x_1, y_j)\Delta y + \Delta x \cdot \sum_j u(x_2, y_j)\Delta y + \ldots$$
$$= \sum_j \left(\sum_j u(x_j, y_j)\Delta y \right)\Delta x \underset{\sum_j f(x_j)\Delta x \underset{\Delta x \to \infty}{\to} \int f(x)dx}{=} \sum_j \left(\int_{-}^{-} u(x_j, y_j)\, dy \right)\Delta x = \int_{-}^{-}\int_{-}^{-} u(x_j, y_j)\, dy \cdot dx$$

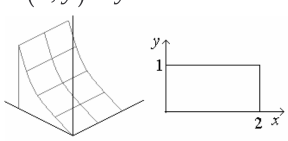
Bsp1: $u(x,y) = xy^2$



Schnittpunkt (für die Grenzen): $2x = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 \cdot dy \cdot dx = \int_0^2 \left[x\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(x\frac{8x^3}{3} - x\frac{x^6}{3} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{8}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7 \right) dx$$
$$= \left[\frac{8}{3}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}\frac{x^8}{8} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\frac{2^5}{5} - \frac{1}{3}\frac{2^8}{8} = 6,4$$

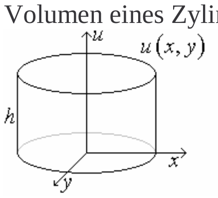
Bsp2: $u(x,y) = y^2$

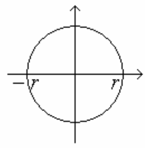


$$V = \int_0^2 \int_0^1 y^2 \cdot dy \cdot dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} \right) dx = \frac{1}{3}[x]_0^2 = \frac{2}{3}$$

$x \; y \;\; 2 \; 1$

Bsp3: Volumen eines Zylinders





$$u(x,y)=h$$

$$x^2+y^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

$$V=\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h\cdot dy\cdot dx=\int_{-r}^{r}\left[hy\right]_{-\sqrt{}}^{\sqrt{}}\cdot dx=h\int_{-r}^{r}\left(\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)-\left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right)dx=2h\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2h\int_{-r}^{r} r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\cdot dx$$

$$\underset{\substack{\frac{x}{r}=\sin\varphi\\ dx=r\cos\varphi\cdot d\varphi}}{=} 2hr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\varphi}\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi=2hr^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot d\varphi \underset{\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)}{=} 2hr^2\,\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi$$

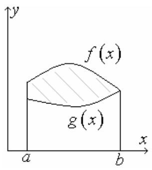
$$=r^2h\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=r^2h\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0\right)\right]=r^2\pi h$$

Satz 1.2

Flächenberechnung

Die von den Kurven $y=f(x)$ und $y=g(x)$ eingeschlossene Fläche ist:

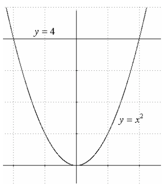
$$A=\int_a^b\int_{g(x)}^{f(x)} u(x,y)\,dy\cdot dx$$



Bew: Volumen mit $h=1$

$$V=\int_a^b\int_{g(x)}^{f(x)} 1\cdot dy\cdot dx=A\cdot 1=A$$

Bsp4: Welche Fläche wird von den Kurven $y=x^2$ und $y=4$ eingeschlossen?

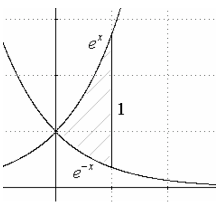


Nullstellen:

$$x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$$

$$A=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} dy\cdot dx=\int_{-2}^{2}\left[y\right]_{x^2}^{4}\cdot dx=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left(4\cdot 2-\frac{8}{3}\right)-\left(-4\cdot 2+\frac{8}{3}\right)=10,667$$

Bsp5:



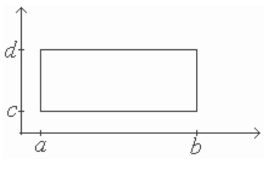
$$A=\int_0^1\int_{e^{-x}}^{e^x} dy\cdot dx=\int_0^1\left[y\right]_{e^{-x}}^{e^x}dx=\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=\left(e^1+e^{-1}\right)-\left(1+1\right)=1,086$$

Satz 1.3

$$\int_a^b\int_c^d u(x,y)\,dy\cdot dx=\int_c^d\int_a^b u(x,y)\,dx\cdot dy$$

(gilt nicht bei variablen Grenzen)

Bew:



$$V=\int_a^b\int_c^d u(x,y)\,dy\cdot dx$$

$$V=\int_c^d\int_a^b u(x,y)\,dx\cdot dy$$

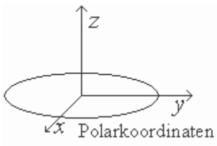
Variable Grenzen

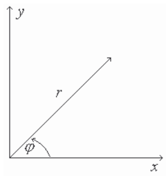
$$\int_0^1\int_0^x 1\cdot dy\cdot dx=\int_0^1\left[y\right]_0^x dx=\int_0^1 x\cdot dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^x\int_0^1 1\cdot dx\cdot dy=\int_0^x\left[x\right]_0^1 dy=\int_0^x dy=\left[y\right]_0^x=x$$

1.3 Volumenberechnung in Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten





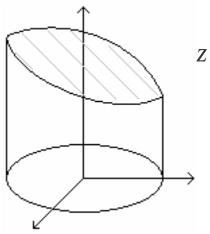
Umrechnung: $x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$z = z$

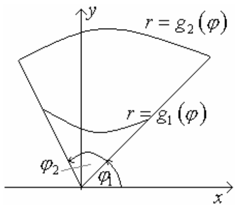
Fläche in Zylinderkoordinaten: $z = f\left(r,\varphi\right)$

Volumenberechnung:



$z = f\left(r,\varphi\right)$

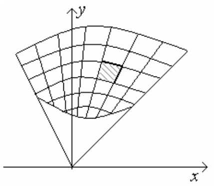
Normalgebiet (Grundfläche)

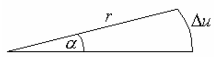


Satz 1.4

> Volumen in Zylinderkoordinaten
> Das durch die Funktion $z = 0$; $z = f\left(r,\varphi\right)$; $r = g_1\left(\varphi\right)$; $r = g_2\left(\varphi\right)$ eingeschlossene Volumen (siehe Abbildung) beträgt
>
> $$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f\left(r,\varphi\right) r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Bew:





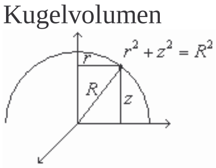
$$\Delta a = \Delta r \cdot \Delta\varphi \cdot r$$

$$\Delta V = \Delta a \cdot f\left(r_i,\varphi_j\right) = \Delta r \cdot \Delta\varphi \cdot r \cdot f\left(r_i,\varphi_j\right)$$

$$\Delta u = \alpha \cdot r$$

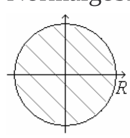
$$V \approx \sum \Delta V = \sum_i \sum_j f\left(r_i,\varphi_j\right) \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \iint f\left(r,\varphi\right) r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Bsp1: Kugelvolumen



$z = \sqrt{R^2 - r^2}$ = Halbkugel Radius R

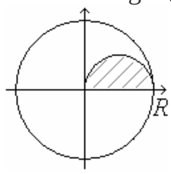
Normalgebiet:



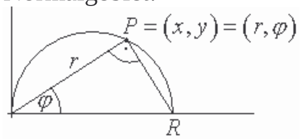
$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \underset{\substack{z=\sqrt{R^2-r^2} \\ dz=\frac{1}{2}\left(R^2-r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2r)dr \\ =-\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot dr \\ \Rightarrow\ r\cdot dr=-zdz}}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_R^0 z \cdot \left(-z \cdot dz\right) \cdot d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\int_0^R z^2 dz \cdot d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^R \cdot d\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 \cdot d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Bsp2: Aus der Kugel (Bsp1) soll ein Gebiet ausgeschnitten werden im Sinne der Abbildung



Normalgebiet:



$$\cos\varphi = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad r = R\cdot\cos\varphi$$

$$V = 2\int\int f(r,\varphi)\, r\cdot dr\cdot d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cdot\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi \underset{\substack{z=\sqrt{R^2-r^2} \\ r\cdot dr=-z\cdot dz(\text{Bsp1})}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_R^{\sqrt{R^2-R^2\cdot\cos^2\varphi}} z(-z\cdot dz)\cdot d\varphi$$

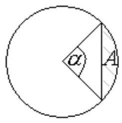
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{R\sqrt{1-\cos^2\varphi}}^{R} z^2\cdot dz\cdot d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{R\cdot\sin\varphi}^{R} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^3\sin^3\varphi}{3}\right)d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}d\varphi - 2\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cdot d\varphi$$

$$\underset{\substack{\text{siehe} \\ \text{Neben-} \\ \text{rechnung}}}{=} \frac{2}{3}R^3\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{R^3}{3}\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}R^3\cdot\frac{\pi}{2} - 2\frac{R^3}{3}\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{R^3}{3}\left(\pi - 2\left(0-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)\right) = \frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$$

Nebenrechnung: $\displaystyle\int\sin^3\varphi\cdot d\varphi \underset{\substack{z=\cos\varphi \\ dz=-\sin\varphi\cdot d\varphi}}{=} \int\left(1-z^2\right)(-dz) = -\left[z-\frac{z^3}{3}\right] = -\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi + c$

Bsp3: Gesucht ist die Fläche des Kreisabschnitts



$A =$ Normalgebiet

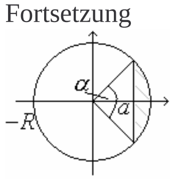
$V =$ Volumen über A mit Höhe 1

$$\Rightarrow \quad V = \int\int f\big(\underbrace{r,\varphi}_{1}\big)\, r\cdot dr\cdot d\varphi = \int\int r\cdot dr\cdot d\varphi = A\cdot 1 = A \quad \Rightarrow \quad \int\int r\cdot dr\cdot d\varphi = \text{Fläche eines Normalgebiets}$$

Satz 1.5

$$\boxed{A = \int\int r\cdot dr\cdot d\varphi \quad \text{ist die Fläche, des durch die Grenzen deffinierten Normalgebiets}}$$

Bsp3: Fortsetzung



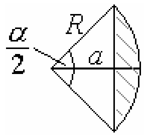
$x = a$

Polarkoordinaten $\boxed{\begin{matrix} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{matrix}} \quad \Rightarrow \quad r\cdot\cos\varphi = a \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$

$$A = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} r\cdot dr\cdot d\varphi = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} d\varphi = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{a}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi = \left[\frac{R^2}{2}\varphi - \frac{1}{2}a^2\tan\varphi\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{R^2}{2}\left[\frac{\alpha}{2}-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}a^2\left(\tan\frac{\alpha}{2} - \underbrace{\tan\left(-\frac{a}{2}\right)}_{\tan x=-\tan(-x)}\right) = \frac{R^2}{2}\alpha - \frac{a^2}{2}2\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}\alpha - a^2\tan\frac{\alpha}{2}$$

Vereinfachung:



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad a = R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{R^2}{2}\alpha - R^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}\left[\alpha - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right] = \frac{R^2}{2}\left[\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$\underset{(2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi=\sin 2\varphi)}{\Rightarrow} A = \frac{R^2}{2}\left[\alpha - \sin\alpha\right]$$

2 Raumintegrale und mehrfache Integrale

2.1 Beispiele

Bsp1: $I=\int_0^1\int_0^2\left(x^2+y^2+\frac{1}{3}\right)dy\cdot dx$

$$x^2+y^2+\frac{1}{3}=\int_0^1\left(x^2+y^2+z^2\right)dz=\left[x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right]_0^1 \quad\Rightarrow\quad I=\int_0^1\int_0^2\int_0^1\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\cdot dy\cdot dx$$

Bsp2: $\int_0^4\int_{-x}^{x}\int_{x-y}^{y}(x\cdot y-z)\,dz\cdot dy\cdot dx=\int_0^4\int_{-x}^{x}\left[xyz-\frac{z^3}{3}\right]_{x-y}^{y}dy\cdot dx=\int_0^4\int_{-x}^{x}\left[\left(xy^2-\frac{y^2}{2}\right)-\left(xy(x-y)-\frac{(x-y)^2}{2}\right)\right]dy\cdot dx=\ldots=$

$$=\int_0^4\int_{-x}^{x}\left(2xy^2-xy+\frac{1}{2}x^2-x^2y\right)dy\cdot dx=\int_0^4\left[2x\frac{y^3}{3}-x\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}x^2y-x^2\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x}dx$$

$$=\int_0^4\left[\left(2x\frac{x^3}{3}-x\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x^2\cdot x-x^2\frac{x^2}{2}\right)-\left(-2x\frac{x^3}{3}-x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2x-x^2\frac{x^2}{2}\right)\right]dx$$

$$=\int_0^4\left(\frac{4}{3}x^4+x^3\right)dx=\left[\frac{4}{3}\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}\right]_0^4=\frac{4}{3}\frac{4^5}{5}+\frac{4^4}{4}=337{,}07$$

Bsp3: $\int_a^b\int_c^d\int_e^f\int_g^h\left(x^2-y^2+z^2-w^2\right)dw\cdot dz\cdot dy\cdot dz$

Anmerkung: Ein $n-$faches Integral wird berechnet, indem man jeweils das innere Integral ausrechnet, solange bis alle Integralwerte ermittelt sind.

Bsp4: $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y}xyz\cdot dz\cdot dy\cdot dx=\int_0^1\int_0^x\left[xy\frac{z^2}{2}\right]_0^{x-y}dy\cdot dx=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^x\left[xy(x-y)^2\right]dy\cdot dx=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^x xy\left(x^2-2xy+y^2\right)dy\cdot dx$

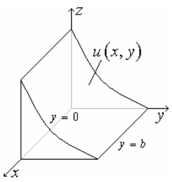
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^x\left(x^3y-2x^2y^2+xy^3\right)dy\cdot dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x^3\frac{y^2}{2}-2x^2\frac{y^3}{3}+x\frac{y^4}{4}\right]_0^x dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x^5}{2}-\frac{2}{3}x^5+\frac{x^5}{4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{6}$$

2.2 Anwendungen in der Mechanik

(a) Volumenberechnung

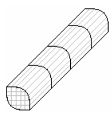
$$V=\int_\alpha^\beta\int_0^b u(x,y)\,dy\cdot dx=\int_\alpha^\beta\int_0^b\int_0^{u(x,y)}dz\cdot dy\cdot dx=\int_{-}^{-}\int_{-}^{-}\int_{-}^{-}dz\cdot dy\cdot dx$$



Bsp: $V=\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_{x-y}^{y+x}\underbrace{dz\cdot dy\cdot dx}_{dv}=\iiint^{V}dv$

Volumenberechnung: $V=\iiint^{K}dv$ $\quad K=$ Körper; $\quad dv=dz\cdot dy\cdot dx\quad$ (Raumelement)

(b) Massenberechnung
gegeben: Körper

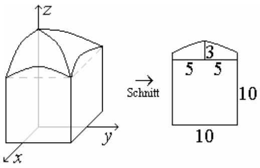


Körper in kleine Würfel unterteilen
Volumen eines Würfels: $dv=dz\cdot dy\cdot dx$
Masse eines Würfels: $\rho\cdot dv=\rho(x,y,z)\,dz\cdot dy\cdot dx\qquad(\rho=\rho(x,y,z)=\text{Dichte})$

$$\text{Gesamtmasse}=M=\sum_i\sum_j\sum_k\rho\left(x_j,y_i,z_k\right)\underbrace{dz_k\cdot dy_j\cdot dx_k}_{dv}\ \underset{dv\to 0}{\longrightarrow}\ \iiint^{K}\rho(x,y,z)\,dz\cdot dy\cdot dx$$

$\Rightarrow$ Massenberechnung für Körper K $\qquad M=\iiint^{K}\rho\cdot dv\qquad(\rho=\text{Dichte})$

Bsp: Ein Aluminiumwürfel der Kantenlänge 10cm soll einen paraboidförmigen Aufsatz erhalten (Abbildung). Man berechne diese Masse des entstehenden Köpers.



Paraboloid: $z\left(x,y\right)=a-\alpha x^2-\beta y^2$

Symmetrie: $\Rightarrow \quad \alpha=\beta$

Berechnung von a und α:

$z\left(0,0\right)=13=a-\alpha 0^2-\beta 0^2 \quad \Rightarrow \quad a=13$

$z\left(5,5\right)=13-\alpha 5^2-\alpha 5^2=10 \quad \Rightarrow \quad \alpha=0,06$

$\Rightarrow \quad z\left(x,y\right)=13-0,06\left(x^2+y^2\right)$

Masse: (aus Grundfläche grenzen ablesen)

$$M={}^{K}\iiint \rho\cdot dv=\int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5}\int_{13}^{13-0,06\left(x^2+y^2\right)} 2,7\cdot dz\cdot dy\cdot dx \qquad \left(\rho=2,7\frac{g}{cm^3}\right)$$

$$M=\int_{5}^{-5}\int_{5}^{-5}\left[2,7\right]_0^{13-0,06\left(x^2+y^2\right)}\cdot dy\cdot dx=\int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5}2,7\left(13-0,06\left(x^2+y^2\right)\right)dy\cdot dx=2,7\int_{-5}^{5}\left[13y-0,06x^2y-0,06\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{5}\cdot dx$$

$$=2,7\int_{-5}^{5}\left\{\left[13\cdot 5-0,06x^2\cdot 5-0,06\frac{125}{3}\right]-\left[-13\cdot 5+0,06x^2\cdot 5+0,06\frac{125}{3}\right]\right\}dx$$

$$=2,7\int_{-5}^{5}\left(130-0,6x^2-0,02\cdot 125\cdot 2\right)dx=3240g=3,24kg$$

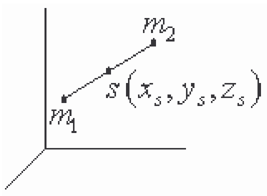
(c) Berechnung von Schwerpunkten

(1) zwei Massenpunkte

$$x_s=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$y_s=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

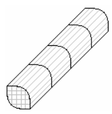
$$z_s=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$$



(2) n Massenpunkte

$$x_s=\frac{\sum_{j=1}^{n}m_j\cdot x_j}{\sum_{j=1}^{n}m_j} \qquad y_s=\frac{\sum_{j=1}^{n}m_j\cdot y_j}{\sum_{j=1}^{n}m_j} \qquad z_s=\frac{\sum_{j=1}^{n}m_j\cdot z_j}{\sum_{j=1}^{n}m_j}$$

(3) Körper



Unterteilung des Körpers in Würfel Δv

$\Delta v=\Delta z_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta x_k$

Jeder Würfel = Massenpunkt mit Masse $\rho\cdot\Delta v$

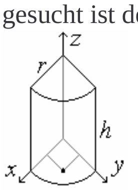
$$x_s=\frac{\sum_k\sum_j\sum_i\overbrace{\rho\cdot\Delta z_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta x_k}^{m_k}\cdot x_k}{M}=\frac{1}{M}\sum_k\sum_j\sum_i\rho\cdot\Delta z_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta x_k\cdot x_k \xrightarrow[\Delta v\to 0]{} \frac{1}{M}\iiint\rho x\cdot\underbrace{dx\cdot dy\cdot dz}_{dv}$$

$$=\frac{1}{M}\,{}^{K}\iiint x\cdot\rho\cdot dv$$

Schwerpunktkoordinaten $\left(x_s,y_s,z_s\right)$

$$\boxed{\begin{aligned}x_s&=\frac{1}{M}\,{}^{K}\iiint x\cdot\rho\cdot dv\\ y_s&=\frac{1}{M}\,{}^{K}\iiint y\cdot\rho\cdot dv\\ z_s&=\frac{1}{M}\,{}^{K}\iiint z\cdot\rho\cdot dv\end{aligned}}$$

Bsp: gesucht ist der Schwerpunkt eines homogenen Viertelzylinders (Abbildung)



homogen $\Leftrightarrow$ $\rho = \text{const}$

$$z_s = \frac{h}{2}$$

$$x_s = \frac{1}{M} {}^K\!\!\iiint x \cdot \rho \cdot dv = \frac{\rho}{\rho \cdot V} \iiint x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = y_s$$

Grundfläche = Normalgebiet

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = \sqrt{r^2 + y^2}$$

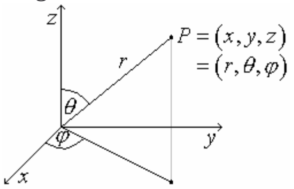
$$x_s = \frac{1}{V} \int_0^h \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{1}{V} \int_0^h \int_0^r \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{r^2-y^2}} = \frac{1}{V} \int_0^h \int_0^r \frac{1}{2} \left(r^2 - y^2 \right) dy \cdot dz = \frac{1}{2V} \int_0^h \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^r dz$$

$$= \frac{1}{2V} \int_0^h \left(r^3 - \frac{y^3}{3} \right) dz = \frac{1}{2V} \frac{2}{3} \int_0^h r^3 dz = \frac{1}{3V} r^3 \left[z \right]_0^h = \frac{r^3 h}{3V} \underset{V=\frac{1}{4}\pi r^2 h}{=} \frac{r^3}{\frac{3}{4} r^2 \pi h} h = 0,424r$$

$$\Rightarrow \quad s = \left(0,424r; 0,424r; \frac{h}{2} \right)$$

3 Raumintegrale in Kugelkoordinaten

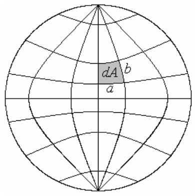
Kugelkoordinaten:



$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$
$$z = r \cdot \cos\theta$$

Raumintegral: $\iiint^K f \cdot dv$ $\qquad dv =$ Volumenelement $= dx \cdot dy \cdot dz$

dv in Kugelkoordinaten



$$dv = dr \cdot dA$$
$$dA = ?$$
$$dA \approx a \cdot b \underset{\substack{b = r\cdot d\theta \\ a = r\cdot d\varphi \cdot \sin\theta}}{=} r^2 \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dv = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr$$

Volumenelement bei Kugelkoordinaten
$dv = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr$

Bsp1: Kugelvolumen $\qquad (R = \text{Kugelradius})$

$$V = \iiint^K dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\varphi \cdot dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \left[-(-1)-(-1)\right] d\varphi \cdot dr$$

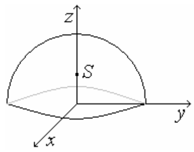
$$= 2\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \cdot dr = 2\int_0^R \left[r^2\varphi\right]_0^{2\pi} dr = 2\int_0^R r^2 \cdot 2\pi \cdot dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Bsp2: Eine Kugel mit dem Radius R habe die Dichte $\rho(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{1}{r^2}$. Man berechne die Masse (z.B. Stern)

$$M = \iiint^K \rho \cdot dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2}\left(r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr\right) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\varphi \cdot dr$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-(-1)-(-1)\right] d\varphi \cdot dr = 2\int_0^R \left[\varphi\right]_0^{2\pi} dr = 4\pi \int_0^R dr = 4\pi R$$

Bsp3: Gesucht sind die Schwerpunktkoordinaten einer Halbkugel



$$S = (x_S, y_S, z_S)$$
$$x_S = y_S = 0$$
$$z_S = ?$$

$$z_S = \frac{1}{M} \iiint^V \rho \cdot z \cdot dv \underset{M = \rho\cdot V}{=} \frac{1}{\rho \cdot V} \iiint^V \rho \cdot z \cdot dv \underset{z = r\cdot\cos\theta}{=} \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr$$

$$= \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr \underset{\substack{u = \sin\theta \\ du = \cos\theta \cdot d\theta}}{=} \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{1} r^3 u \cdot du \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 d\varphi \cdot dr$$

$$= \frac{1}{2V} \int_0^R r^3 \left[\varphi\right]_0^{2\pi} dr = \frac{1}{2V} \int_0^R r^3 2\pi \cdot dr = \frac{\pi}{V}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{\frac{2}{3}\pi \cdot R^3} \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8} R = z_S$$

4 Die Guldin'sche Regel

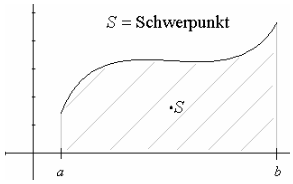
Wiederholung: Schwerpunkt eines Körpers $=(x_0, y_0, z_0)$ ist

$$x_0 = \frac{1}{V} \iiint_K x \cdot dv$$

$$y_0 = \frac{1}{V} \iiint_K y \cdot dv$$

$$z_0 = \frac{1}{V} \iiint_K z \cdot dv$$

Bsp: z.B. dünne Platte



Def. 4.1

Der Schwerpunkt der zwischen $y = f(x)$ und der $x-$Achse, sowie $x = a$ und $x = b$ liegende Fläche hat die Koordinaten mit

$$x_0 = \frac{1}{A} \int_a^b \int_0^{f(x)} x \cdot dy \cdot dx$$

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_a^b \int_0^{f(x)} y \cdot dy \cdot dx$$

Satz 4.1

Guldin'sche Regel

$f(x) \geq 0,$ stetig

$y_0 = y-$Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche (Def 4.1)

$A =$ Flächeninhalt

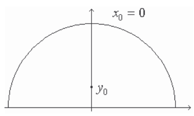
$V =$ Volumen des Rotationskörpers (bei Rotation $f(x)$ um $x-$Achse)

dann: $\boxed{V = A \cdot 2\pi \cdot y_0}$

Bew: $V = \pi \int_0^b f^2(x) dx$

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_a^b \int_0^{f(x)} y \cdot dy \cdot dx = \frac{1}{A} \int_a^b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{f(x)} dx = \frac{1}{2A} \underbrace{\int_a^b f^2(x) dx}_{\frac{V}{\pi}} = \frac{1}{2A} \frac{V}{\pi} = y_0$$

Bsp1: Gesucht ist der Schwerpunkt einer Halbkreisplatte mit Radius r.



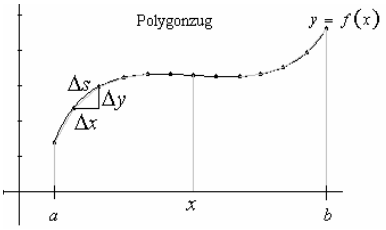
$$V = A \cdot 2\pi \cdot y_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^2 \pi}{2} .2\pi \cdot y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{4\pi r^3 \cdot 2}{3 \cdot 2\pi \cdot \pi r^2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4}{3\pi} r = 0,43r$$

IX DIFFERENTIALGEOMETRIE

1 Ebene Kurven in kartesischen Koordinaten

1.1 Die Bogenlänge

Berechnung der Länge (Bogenlänge) einer Kurve $y = f(x)$



$s(x) =$ Länge der Kurve bis x

$s(a) = 0$

$s(b) =$ Gesamtlänge

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\int_a^b \frac{ds}{dx}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx \int_0^L ds = L$$

Satz 1.1

> Sei $y = f(x)$ eine Kurve $\left(f(x)\text{ differenzierbar}\right)$ für $a \le x \le b$
>
> $$\Rightarrow \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \text{Kurvenlänge (Bogenlänge)}$$

Bsp1: Kreisumfang $\left(\text{Einheitskreis: } r = 1\right)$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$L_{\text{Halbkreis}} = L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}} \cdot dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

Bsp2: $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \qquad (0 \le x \le 2)$

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Kurvenlänge: $L = \int_0^2 \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \int_0^2 \sqrt{1 + x} \cdot dx \underset{\substack{z = 1 + x \\ dz = dx}}{=} \int_1^3 z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{27} - 1\right] = 2{,}8$

1.2 Tangente und Normale

Satz 1.2

> Seien $y = f(x);\ y = g(x)$ Kurven. Kurven schneiden sich bei $x = x_0$ im rechten Winkel, falls
>
> (1) $f(x_0) = g(x_0)$
>
> (2) $f'(x_0) = -\dfrac{1}{g'(x_0)}$

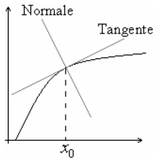
Bew: $f'(x_0) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$g'(x_0) = \tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$f'(x_0) = -\dfrac{1}{g'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha\cdot\sin\beta = -\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\Rightarrow \quad \sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta = 0 = \cos(\alpha-\beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha-\beta = 90° = \text{Schnittwinkel}$

Tangente und Normale



Satz 1.3

> Sei $y = f(x)$ eine Kurve
>
> $y = y_0 + y'(x_0)(x-x_0)$ Tangente an (x_0, y_0)
>
> $y = y_0 - \dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$ Normale an (x_0, y_0)

Bew: Tangente: (1) geht durch (x_0, y_0)

(2) $y'(x_0) = \text{Steigung der Gerade}$

Normale: (1) geht durch (x_0, y_0)

(2) Steigung $= \dfrac{1}{y'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad$ senkrecht zur Tangente (Satz 1.2)

Bsp1: Man bestimme Tangente und Normale von $y = \sin x$ in $x = 0$

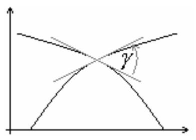
Tangente: $y = 0 + \cos 0(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = x$

Normale: $y = 0 - \dfrac{1}{\cos 0}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = -x$

Satz 1.4

> Schnittwinkel zweier Kurven
>
> Seien $y = f(x)$; $y = g(x)$ zwei Kurven; Schnittpunkt bei $x = x_0$
>
> $\Rightarrow$ Schnittwinkel: $\tan\gamma = \dfrac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}$

Bew:



$\gamma = \alpha - \beta \quad (\alpha, \beta = \text{Tangentenwinkel})$

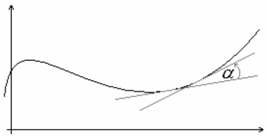
$$\tan\gamma = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{1 + \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}$$

Bsp: Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven $\sin x$ und $\cos x$

$\sin x_0 = \cos x_0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin x_0}{\cos x_0} = 1 = \tan x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4} \quad (45°) \quad ; \quad \tan\alpha = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}}{1 - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}} = 2{,}83 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 70{,}5°$

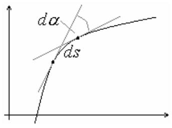
1.3 Krümmung einer Kurve



Krümmung ~ Änderung des Tangentenwinkel

Def. 1.1

$$\kappa(x) = \kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \text{Krümmung bei } x \qquad \alpha = \text{Tangentenwinkel}$$

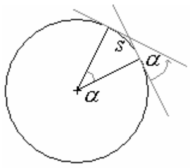


Bsp: Gerade $\Rightarrow$ $\kappa = 0$

Satz 1.5

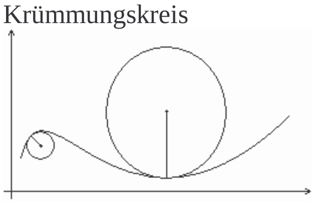
Ein Kreis mit dem Radius r hat überall die Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$

Bew:



$$\kappa = \frac{\alpha}{s} \underset{s=r\cdot\alpha}{=} \frac{\alpha}{r\cdot\alpha} = \frac{1}{r}$$

Bsp: Krümmungskreis



$$\kappa(x) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r}$$

Def. 1.2

$y = f(x)$; $\quad \kappa(x) = \text{Krümmung} \quad \big(f(x) \text{ differenzierbar}\big)$

(1) κ = Krümmungskreis an der Stelle x $\Leftrightarrow$ κ hat Radius r und $|\kappa(x)| = \frac{1}{r}$

(2) r = Krümmungsradius

Satz 1.6

$$y = f(x) \text{ Kurve} \quad \Rightarrow \quad \kappa(x) = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}$$

Bew: $y' = \tan\alpha = \tan\alpha(x)$

$$y'' = \left(1+\tan^2\alpha(x)\right)\frac{d\alpha}{ds} = \left(1+\tan^2\alpha\right)\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dx} = \left(1+y'^2\right)\cdot\kappa(x)\cdot\frac{ds}{dx}$$

Satz 1.1: $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$

$$\Rightarrow \quad \left(1+y'^2\right)\cdot\kappa\cdot\sqrt{1+y'^2} = y'' \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)\cdot\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}$$

Anmerkung:

$$r = \frac{1}{|\kappa|} = \left|\frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''}\right|$$

Bsp1: Man berechne den Krümmungsradius von $y = \cos x$ bei $x = 0$

$$\kappa = \frac{-\cos 0}{\sqrt{1+\sin^2 0}^3} = \frac{-1}{\sqrt{1+0}^3} = -1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{|\kappa|} = 1$$

Bsp2: Krümmung von $y=(x-1)^2$ bei $x=1$

$$y'=2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y''=2$$

$$\kappa=\frac{2}{\sqrt{1+0^2}^{\,3}}=2 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{2}$$

Bsp3: wie Bsp2, $x=0$

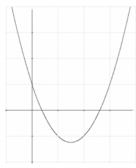
$$\kappa=\frac{2}{\sqrt{1+(-2)^2}^{\,3}}=\frac{2}{\sqrt{5}^{\,3}}=0{,}179 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{0{,}179}=5{,}59$$

Satz 1.7

$$\boxed{\begin{array}{l} y=f(x) \text{ hat Krümmung } \kappa=\kappa(x) \\ \kappa(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\text{Gerade} \end{array}}$$

Bew: $\kappa=\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad y''=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'=a \quad \Leftrightarrow \quad y=ax+b=\text{Gerade}$

Bsp: Für welches x ist die Krümmung der Kurve $y=x^2-3x+1$ maximal.



$$\kappa=\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}} \underset{\left[\substack{y'=2x-3\\ y''=2}\right]}{=} \frac{2}{\sqrt{1+(2x-3)^2}^{\,3}}=\max=2\left[1+(2x-3)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\kappa'=-2\frac{3}{2}\left[1+(2x-3)^2\right]^{-\frac{5}{2}}\cdot 2(2x-3)2=0=-\frac{12(2x-3)}{\sqrt{1+(2x-3)^2}^{\,5}} \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=1{,}5$$

Satz 1.8

$$\boxed{\begin{array}{lll} y=f(x) \text{ hat in } x=x_0 \text{ Extrenum} & & \\ \Rightarrow \quad \kappa(x_0)>0 & \Leftrightarrow & \text{Minimum} \\ \quad \kappa(x_0)<0 & \Leftrightarrow & \text{Maximum} \end{array}}$$

Bew: $\kappa(x_0)=\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}} \underset{y'(x_0)=0}{=} y''(x_0) \begin{cases} >0 & \text{min} \\ <0 & \text{max} \end{cases}$

Anmerkung:
Für jedes x gilt:

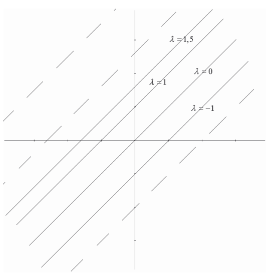
$\kappa(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Linkskrümmung

$\kappa(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Rechtskrümmung

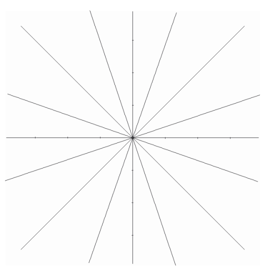
1.4 Kurvenscharen

Bsp1: $y=x+\lambda$

$\lambda=$ Scharparameter

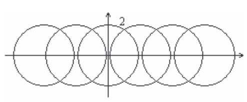


Bsp2: $y=\lambda\cdot x$

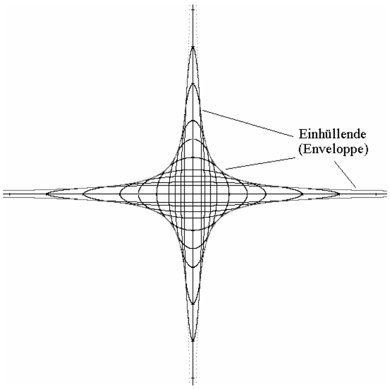


Bsp3: $y=\sqrt{-(x-\lambda)^2+4}$

$$y^2=-(x-\lambda)^2+4 \quad \Rightarrow \quad (x-\lambda)^2+(y-0)^2=2^2$$



Bsp4: $\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{\lambda^2}}=1$ Elipse mit Halbachsen $\lambda, \frac{1}{\lambda}$



Def. 1.3

> Eine Kurve, die in jedem Punkt die Kurve einer Kurvenschar berührt (d.h. gleiche Tangente), heißt Einhüllende (Enveloppe)

Satz 1.9

> Berechnung der Einhüllende
> Sei $y=f(x,\lambda)$ Kurvenschar.
> Die Einhüllende erhält man, indem man in $y=f(x,\lambda)$ die Lösung λ der Gleichung $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}=0$

d.h. (1) $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \Rightarrow \lambda=\ldots$

(2) λ in $y=f(x,\lambda)$ einsetzen

Bew: $y=f(x,\lambda)$

$$y_2-y_1=d_E y$$
$$d_E y=f_x dx+f_\lambda d\lambda$$

$$y_3-y_1=dy=f_x dx+f_\lambda d\lambda \underset{f_\lambda=0}{=} f_x dx$$
$$d_E y=dy \Rightarrow f_x dx+\underbrace{f_\lambda d\lambda}_{0}=f_x dx \Rightarrow f_\lambda=0$$

Bsp6: $y=\lambda\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)$

Einhüllende: (1) $\frac{\partial y}{\partial\lambda}=0=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\lambda x-\frac{\lambda^2}{2}\right]=x-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=x$

(2) $\lambda=x$ einsetzen $\Rightarrow y=x\left(x-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2$

Bsp7: $\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{\lambda^2}}=1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{\lambda^2}\left(1-\frac{x^2}{\lambda}\right) \Rightarrow y=\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\frac{x^2}{\lambda}}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-x^2}=\frac{\sqrt{\lambda^2-x^2}}{\lambda^2}$

(1) $$\frac{\partial y}{\partial\lambda}=\frac{\frac{1}{2}\left(\lambda^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\lambda\cdot\lambda^2-\sqrt{\lambda^2-x^2}\cdot 2\lambda}{\lambda^4}=\frac{\lambda^3-2\lambda\left(\lambda^2-x^2\right)}{\lambda^4\sqrt{\lambda^2-x^2}}=\frac{\lambda^2-2\left(\lambda^2-x^2\right)}{\lambda^3\sqrt{\lambda^2-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda^2-x^2}}-\frac{2\sqrt{\lambda^2-x^2}}{\lambda^3}=0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}-\frac{2}{\lambda^3}\left(\lambda^2-x^2\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}-\frac{2}{\lambda}+\frac{2x^2}{\lambda^3}=0$$

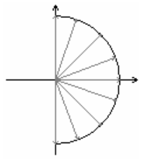
$$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda^2+2x^2=0 \Rightarrow -\lambda^2+2x^2=0 \Rightarrow \lambda=\sqrt{2}x$$

(2) λ einsetzen $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{2x^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{2x^2}}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{2x^2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{4x^2} \Rightarrow y=\frac{1}{2x}$$

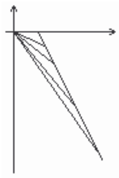
2 Ebene Kurven in Vektordarstellung

Bsp1: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\qquad -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \infty$ viele Vektoren



Halbkreis in vektorieller Form

Bsp2: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 1+t \\ -2t \end{pmatrix}=$ $\qquad 0\le t\le 2$

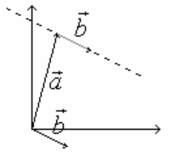


Geradenstrich verktorieller Darstellung

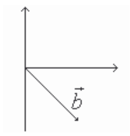
Satz 2.1

> Die Endpunkte der Vektoren $\vec{s}(t)=\vec{a}+t\cdot\vec{b} \quad (t\in\mathbb{R})$
> liegen auf einer Geraden durch den Endpunkt von $\vec{a}$ mit der Richtung $\vec{b}$.

Bew:



Bsp1: Welche Gerade geht durch den Punkt $(1,1)$ und hat die Steigung -1?



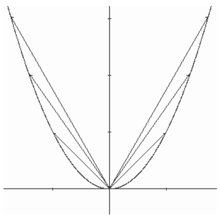
$$\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

Satz 2.2

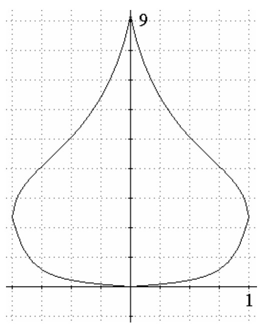
> Es seien $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ differenzierbar für $a\le t\le b$,
> dann liegen die Endpunkte aller Vektoren $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ auf einer Kurve.

Bsp2: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}$



Bsp3: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R})$

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3/4\,\pi$	π	$-\pi/4$
$x=\sin t$	0	0,7	1	0,7	0	0,7
t^2	0	0,6	2,3	4,1	9,2	0,6



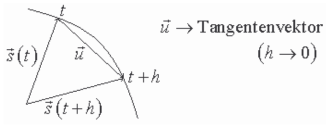
Def. 2.1

$$\boxed{\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{s}'(t)=\begin{pmatrix}\varphi'(t)\\ \psi'(t)\end{pmatrix}}$$

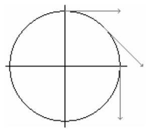
Satz 2.3

$\vec{s}(t)=$ Kurve $\Rightarrow$ $\vec{s}'(t)=$ Tangentenvektor
(d.h. Vektor in Tangentenrichtung)

Bew: $$\vec{s}=\begin{pmatrix}\varphi'(t)\\ \psi'(t)\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\begin{pmatrix}\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\\ \dfrac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}\end{pmatrix}\approx\frac{1}{h}\left[\begin{pmatrix}\varphi(t+h)\\ \psi(t+h)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{h}\left[\vec{s}(t+h)-\vec{s}(t)\right]$$



Bsp: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ $(0\le t\le 2\pi)$



Tangentenvektor

$s'(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$

Satz 2.4

$L=$ Kurvenlänge (Bogenlänge) für die Kurve $\vec{s}(t)$ mit $a\le t\le b$ $\Rightarrow$ $L=\int_a^b |\vec{s}'(t)|\cdot dt$

Bew: Sei $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$

Satz 1.1:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+y'^2}\cdot dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)^2}\cdot dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\cdot\varphi'(t)\cdot dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\cdot dt=\int_a^b\left|\begin{pmatrix}\varphi'(t)\\ \psi'(t)\end{pmatrix}\right|\cdot dt=\int_a^b|s'(t)|\cdot dt$$

Bsp: Kreisumfang

Kreis: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}r\cdot\sin t\\ r\cdot\cos t\end{pmatrix}$ $(0\le t\le 2\pi)$

$\vec{s}'(t)=r\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$

$$L=\int_0^{2\pi}|\vec{s}(t)|\cdot dt=\int_0^{2\pi}r\cdot\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot dt=\int_0^{2\pi}r\cdot dt=2r\pi$$

3 Parameterdarstellung einer Kurve

$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix}=\text{Kurve} \qquad (a\le t\le b)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ a\le t\le b\end{array}}$ Parameterdarstellung $(t=\text{Parameter})$

Bsp1: $x=\dfrac{t\cdot\cos t}{2\pi} \qquad y=\dfrac{t\cdot\sin t}{2\pi} \qquad (0\le t\le 4\pi)$ (Spirale um Nullpunkt – zwei Umdrehungen)

Kurvenlänge $=L=?$

$\vec{s}=\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} \Rightarrow L=\int\limits_a^b |\vec{s}'(t)|\cdot dt$

$\Rightarrow$ Kurvenlänge in Parameterdarstellung $L=\int\limits_a^b\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\cdot dt$

Kurvenlänge in Bsp1:

$$L=\int\limits_0^{4\pi}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\cdot dt=\int\limits_0^{4\pi}\sqrt{\left(\frac{t\cdot\cos t}{2\pi}\right)'^2+\left(\frac{t\cdot\sin t}{2\pi}\right)'^2}\cdot dt=\int\limits_0^{4\pi}\frac{1}{2\pi}\sqrt{(\cos t-t\cdot\sin t)^2+(\sin t+t\cdot\cos t)^2}\,dt$$

$$\underset{\text{kürzt sich raus}}{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{4\pi}\sqrt{1+t^2}\cdot dt\underset{\text{Tabelle}}{=}\frac{1}{2\pi}\left[t\cdot\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t++\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^{4\pi}=12,86$$

4 Raumkurven

4.1 Raumkurven in Vektordarstellung

Satz 4.1

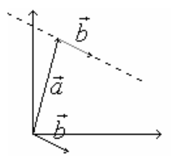
> Es seien $u(t), v(t), w(t)$ für $a \le t \le b$ differenzierbare Funktionen, dann liegen die Endpunkte aller Vektoren $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ auf einer Kurve im dreideimensionalen Raum. t heißt Parameter.

Bsp1: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le \infty)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{matrix}} \Rightarrow$ Spirale um die $z-$Achse

Bsp2: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \quad x-$Achse

Bsp3: $\vec{s}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$



= Gerade
$\vec{a}$ = Aufpunkt
$\vec{b}$ = Richtung der Geraden

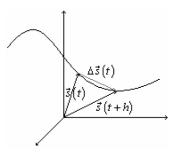
Def. 4.1

$$\boxed{\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (a \le t \le b) \quad (\text{Raumkurve}) \quad \Rightarrow \quad \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}}$$

Satz 4.2

> $\vec{s}'(t) =$ Tangentenvektor zu $\vec{s}(t)$ an der Selle t (Vektor in Tangentenrichtung)

Bew:



$$\Delta\vec{s}(t) = \vec{s}(t+h) - \vec{s}(t)$$

$$\frac{\Delta\vec{s}(t)}{h} = \frac{\vec{s}(t+h) - \vec{s}(t)}{h} \underset{h \to 0}{\to} \vec{s}'(t) = \text{Tangentenvektor}$$

Bsp4: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$

$$t = \frac{\pi}{4}: \quad \vec{s}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -0,7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t = \frac{\pi}{2}: \quad \vec{s}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def. 4.2

> Es sei t die Zeit und $\vec{s}(t)$ eine Raumkurve, dann heißt $\vec{s}'(t)$ Bahnkurve

Beispiele: Bahn eines Planeten
Bahn eines Elektrons
Bahn eines Photon
usw.

Satz 4.3

$$\boxed{\vec{s}(t) = \text{Bahnkurve} \quad \Rightarrow \quad \vec{s}'(t) = \text{Vektor der Geschwindigkeit}}$$

Bew: zeigen: (1) Tangentenvektor
(2) $|s'(t)| = v = \text{Gesschwindigkeit}$

zu (1) klar!

zu (2) Beweis Satz 4.2 $\Rightarrow$ $\vec{s}'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta \vec{s}(t)}{h} \approx \dfrac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = v$

Bsp5: Bewegung eines Punktes auf einer Ellipse.

Bahnkurve: $\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \\ b \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad (T = \text{Umlaufzeit})$

Nachweis, dass Ellipse vorliegt

$$\begin{array}{l} x = a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \\ y = b \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin \frac{2\pi}{T} t \\ \frac{y}{b} = \cos \frac{2\pi}{T} t \end{array} \underset{\text{quadrieren \& addieren}}{\Rightarrow} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t \\ -b \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = |\vec{s}'(t)| = \sqrt{a^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{T} t + b^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{T} t} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t + b^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t}$$

$t = 0: \quad v_1 = \dfrac{2\pi}{T} \sqrt{a^2 + 0^2} = \dfrac{2\pi a}{T}$ $\qquad t = \dfrac{\pi}{4}: \quad v_2 = \dfrac{2\pi}{T} \sqrt{0^2 + b^2} = \dfrac{2\pi b}{T}$

Bsp6: Kreisbewegung: $r = a = b$ (in Bsp5)

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Satz 4.4

$$\boxed{\vec{s}(t) = \text{Kurve}, \, a \le t \le b \quad \Rightarrow \quad \text{Kurvenlänge} = L = \int_a^b |\vec{s}'(t)| \cdot dt}$$

Bew: $t = \text{Zeit}$

$$\int_a^b |\vec{s}'(t)| \cdot dt = \int_a^b v \cdot dt \underset{v = \frac{ds}{dt}}{=} \int_a^b \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_\alpha^\beta ds = L$$

Bsp7: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$ $\quad (0 \le t \le \infty)$ $\quad (\text{Spirale})$

Länge einer Windung

$$L = \int_0^{2\pi} |\vec{s}'(t)| \cdot dt = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1} + 1} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi = 8{,}886$$

4.2 Raumkurven in Parameterdarstellung

Bsp: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le \infty) \quad (\text{Spirale})$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{matrix}} \quad \text{Parameterdarstellung}$$

Parameterdarstellung von Raumkurven

$$\boxed{\begin{matrix} x = u(t) & & \\ y = v(t) & \quad (a \le t \le b) \quad & t = \text{Parameter} \\ z = w(t) & & \end{matrix}}$$

Tangentendarstellung

$x = u'(t)$
$y = v'(t)$
$z = w'(t)$

X VEKTORANALYSIS

1 Vektorfelder

Def. 1.1

> Ordnet man jedem Punkt (x, y, z) des Raumes einen Vektor $\vec{v}$ zu, erhält man ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$.
> Ordnet man jedem Punkt (x, y, z) der Ebene einen Vektor $\vec{v}$ zu, erhält man ein ebenes Vektorf. $\vec{v}(x, y, z)$.

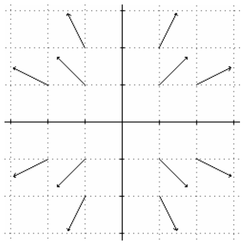
Beispiele:

(1) $\vec{F}(x, y, z)$ Kraftfeld der Erde

(2) $\vec{E}(x, y, z)$ Elektrische Feldstärke

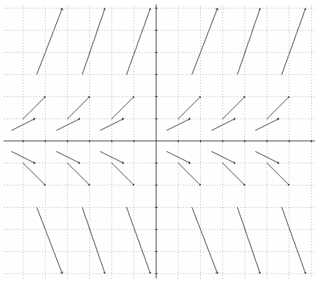
(3) Geschwindigkeitsvektoren in Flüssigkeiten

(4) $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$|\vec{v}(x, y, z)| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

(5) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$



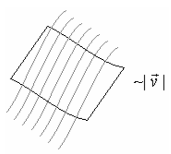
Anmerkung:
$f(x, y, z) =$ skalares Feld

Bsp: Temperatur, Druck

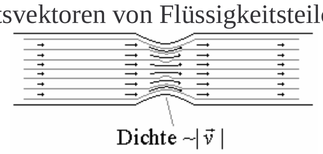
Def. 1.2

> Feldlinien
> gegeben: Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$
>
> (1) Eine Kurve Γ für die in jedem Punkt (x, y, z) der Vektor $\vec{v}(x, y, z)$ ein Tangentenvektor ist, heißt Feldlinie des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z)$.
>
> (2) Die Dichte der Feldlinien sei proportional zu $|\vec{v}(x, y, z)|$, d.h.: die Anzahl der Feldlinien, die zu $\vec{v}(x, y, z)$ senkrechtes Flächenstück der Größe 1 gehen, ist proportional zu $|\vec{v}(x, y, z)|$

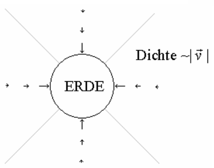
d.h:



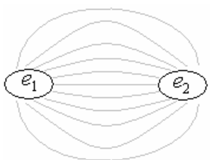
Bsp1: Geschwindigkeitsvektoren von Flüssigkeitsteilchen in einer strömenden Flüssigkeiten (in einem Rohr)



Bsp2:



Bsp3:



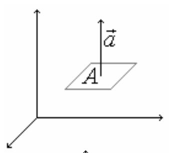
2 Flächenintegral

Def. 2.1

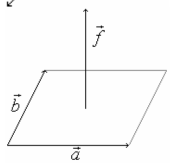
> Flächenvektor
> Es sei A ein ebenes Flächenstück im Raum. Der Vektor $\vec{a}$ heißt Flächenvektor, falls
> (1) $\vec{a} \perp A$ (im Sinne einer Rechtsschraube)
> (2) $|\vec{a}| =$ Fläche von A

Beispiele:

(1)



(2)



$\vec{f} = \vec{a} \times \vec{b}$

Das Vektorprodukt ist ein Flächenvektor

(3) Welcher Flächenvektor gehört zu dem Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0,1,1)$ $B = (1,1,2)$ $C = (2,2,4)$?

$$\vec{u} = C - B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = A - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

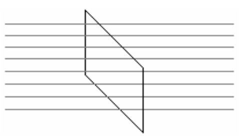
$$\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 2.1

> Es sei $\vec{v}(x,y,z)$ ein Vektorfeld und A ein kleines Flächenstück mit dem Flächenvektor $\vec{a}$. Dann gilt
> $\vec{a} \cdot \vec{v}(x,y,z) \sim$ Feldlinien durch $A(x,y,z)$
> $\vec{a} \cdot \vec{v}(x,y,z) = \Phi =$ skalarer Fluß

Bew: Dichte Feldlinien $\sim |\vec{v}| = |\vec{v}(x,y,z)|$

$\Rightarrow$ $|\vec{v}| \sim$ Anzahl Feldlinien durch senkrechtes Flächenstück mit Fläche $A = 1$



$\Rightarrow$ $|\vec{v}| \cdot A =$ Feldlinien durch senkrechte Fläche, Größe $A = |\vec{v}| \cdot |\vec{a}|$

$\Rightarrow$ $|\vec{v}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\alpha =$ Anzahl Feldlinien durch beliebige Fläche $= \vec{v} \cdot \vec{a} = \Phi$

Bsp1: Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y+x \\ x+z \end{pmatrix}$

gesucht: skalarer Fluß im Punkt $x = 1 \mid y = 1 \mid z = 0$ durch das Einheitsquadrat der $y - z -$ Ebene

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da Vektor des Einheitsquadrats der y - z - Ebene nur in $x -$ Richtung zeigt

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Bsp2: strömendes Gas (Flüssigkeit) Vektorfeld $= \vec{v}(x, y, z) =$ Geschwindigkeitsvektoren

Anzahl der Moleküle durch Fläche A in einer Sekunde

$|\vec{v}| = \frac{L}{1} \quad \sim A \cdot L = A \cdot |\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{v}|$

Anzahl der Teilchen pro Sekunde ist allgemein: $|\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = \vec{a} \cdot \vec{v} = \Phi$

Anmerkung:
Der skalare Fluß eines Vektorfeldes ist proportional zur Zahl der Feldlinien durch die zugehörige Fläche.
Ist das Vektorfeld ein Geschwindigkeitsfeld ist der skalare Fluß zusätzlich proportional zur Anzahl der Teilchen die pro Sekunde durch A gehen.

Skalarer Fluß für nichtebene Flächen

(1) konstruiere Überlagerung ebener Flächenstückchen mit Flächenvektor $\Delta\vec{a}_j$

skalarer Fluß durch $\Delta\vec{a}_j$ ist $\Phi_j = \vec{v} \cdot \Delta\vec{a}_j$

(2) bilde $\tilde{\Phi} = \sum_j \vec{v}_j \cdot \Delta a_j$

(3) bilde $\Delta a_j \to \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \vec{v}_j \cdot \Delta a_j = {}^{A}\!\!\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = {}^{A}\!\!\iint \vec{v} \cdot d\vec{a}$

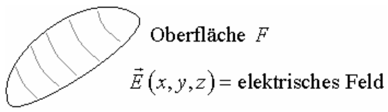
Bsp3: $\vec{v}(x, y, z) =$ Vektorfeld: strömendes Gas

$F =$ beliebige Fläche $\quad \Rightarrow \quad {}^{F}\!\!\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = \Phi \sim$ Anzahl der Teilchen durch F (pro Sekunde)

Bsp4: $\vec{E}(x, y, z) =$ elektrisches Feld

$\Rightarrow \quad {}^{F}\!\!\int \vec{E} \cdot d\vec{a} \sim$ Anzahl Feldlinien durch A

Bsp5:



${}^{F}\!\!\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = {}^{F}\!\!\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} \sim$ Zahl der Feldlinien, die aus dem Körper austreten $\quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} \sim Q =$ Ladung

Def. 2.2

Geschlossenes Flächenintegral
Sei $F =$ geschlossene Fläche $\quad \Rightarrow \quad {}^{F}\!\!\int \vec{v} \cdot d\vec{a} = {}^{F}\!\!\oint \vec{v} \cdot d\vec{a}$

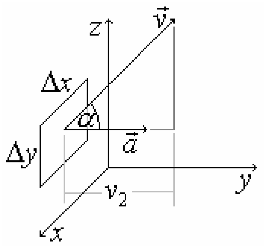
3 Der Integralsatz von Gauß

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} \qquad \text{Vektorfeld}$$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = ?$$

(1) Fläche in $x-y-$Ebene

$$\Phi_{xz} = \vec{v} \cdot \vec{a} = |\vec{v}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \underbrace{(|\vec{v}| \cdot \cos\alpha)}_{v_2} \cdot |\vec{a}| = v_2 \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$



$$\Rightarrow \qquad \Phi_{xz} = v_2 \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

analog folgt:

$$\Phi_{xy} = v_3 \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

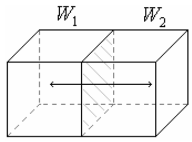
$$\Phi_{yz} = v_1 \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

(2) $$^{W}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} \approx v_1(\Delta x,\cdot,\cdot)\Delta y \cdot \Delta z - v_1(0,\cdot,\cdot)\Delta y \cdot \Delta z + v_3(\Delta z)\Delta x \cdot \Delta y - v_3(0)\Delta x \cdot \Delta y + v_2(\Delta y)\Delta x \cdot \Delta z - v_2(0)\Delta x \cdot \Delta z$$

$$= \frac{v_1(\Delta x) - v_1(0)}{\Delta x}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \frac{v_2(\Delta y) - v_2(0)}{\Delta y}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \frac{v_3(\Delta z) - v_3(0)}{\Delta z}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \underbrace{\left[\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right]}_{\operatorname{div}\vec{v}} = \operatorname{div}\vec{v} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

(3) Zwei Würfel



$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = {}^{W_1}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} + {}^{W_2}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

(Berührseite hebt sich auf)

(4) Beliebiger Körper

$$^{K}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} \approx \sum_{W_j} {}^{W_j}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} \underset{\text{mit } \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{=} \sum_{jkm} \operatorname{div}\vec{v}_{jkm}(\Delta x_j \cdot \Delta y_k \cdot \Delta z_m) \underset{\substack{\Delta x_j \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_m \to 0}}{\rightarrow} {}^{K}\iiint \operatorname{div}\vec{v} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Def. 3.1

> Divergenz
>
> $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Satz 3.1

> Integralsatz von Gauß
>
> $K =$ Körper mit Oberfläche F und $\vec{v} =$ Vektorfeld $\quad \Rightarrow \quad {}^{F}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = {}^{K}\iiint \operatorname{div}\vec{v} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

Bsp1: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad K =$ Einheitskugel

$$^{K'}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = {}^{K}\iiint \operatorname{div}\vec{v} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = {}^{K}\iiint 3 \cdot dv = 3 \cdot {}^{K}\iiint dv$$

$$\left[\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3\right]$$

Bsp2: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ z + x \\ x^2 - 3 + y + z \end{pmatrix} \qquad K = \text{Körper}$

$$\oint^{K'} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \iiint^{K} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \iiint^{K} (3 + 0 + 1) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 4 \cdot \iiint^{K} dv = 4 \cdot \text{Volumen}$$

Bsp3: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sin y \\ x^2 - 3z \\ \arctan(y - x) \end{pmatrix} \qquad K = \text{Einheitswürfel}$

$$\oint^{W'} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \iiint^{W} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \iiint^{W} (0 + 0 + 0) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \cdot \iiint^{W} dv = 0$$

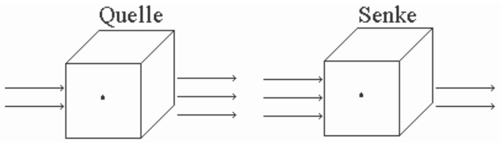
$\left(\text{Divergenz } 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Feldlinien ungehindert}\right)$

4 Quellen und Senken

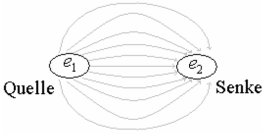
Def. 4.1

> gegeben: Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z)$
>
> (1) Ein Punkt $P=(x_0,y_0,z_0)$ im Raum heißt Quelle des Vektorfeldes, falls bei beliebig kleinen Volumen die P enthalten mehr Feldlinien herauskommen als hineingehen (gemessen in Vektorrichtung)
>
> (2) Ein Punkt $P=(x_0,y_0,z_0)$ im Raum heißt Senke des Vektorfeldes, falls bei beliebig kleinen Volumen die P enthalten mehr Feldlinien hineingehen als herauskommen (gemessen in Vektorrichtung)

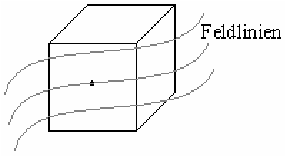
Bsp1: Flüssigkeit $\vec{v}(x,y,z)$ Geschwindigkeiten Quelle Senke



Bsp2: Elektrisches Feld



Bsp3:



In P Quelle / Senke?

Feldlinien gehen ungehindert durch $\Rightarrow$ keine Quelle / Senke

$$\oint^{W'} \vec{v}\cdot d\vec{a} = 0 = \iiint^{W} \operatorname{div}\vec{v}\cdot dx\cdot dy\cdot dz \underset{\text{für alle } W}{=} 0$$

Satz 4.1

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v}=0 \text{ in } P \quad\Leftrightarrow\quad \text{in } P \text{ existieren keine Quellen und Senken}}$$

Bsp4: Elektrostatik

Bilanz der Feldlinien ~ Ladung in V

Volumen $\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} \sim Q \ (\text{in } V) \Rightarrow \iiint^{V} \operatorname{div}\vec{E}\cdot dx\cdot dy\cdot dz \sim Q$

V klein $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E}\approx \text{const} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E}\cdot \iiint^{V} dx\cdot dy\cdot dz \sim Q$

$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E}\cdot V \sim Q \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E}\sim \frac{Q}{V} = \rho = \text{Ladungsdichte}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{E}\sim\rho \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\rho \end{array}}$$

Bsp5: Punktladung

Elektrisches Feld: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

muß gelten: $(x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{E} = 0$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right] \underset{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}=r}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

analog: $\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r^2-3y^2}{r^5} \qquad \frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r^2-3z^2}{r^5}$

Bsp6: $\vec{H}$ = Magnetische Feldstärke

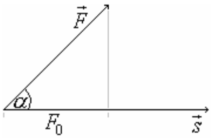
$\operatorname{div}\vec{H} = 0$

5 Kurvenintegrale (Linienintegrale)

Bsp1: (1) Arbeit = Kraft · Weg

$$\boxed{W = F \cdot s}$$

(2)



$\vec{F}$ = Kraftvektor

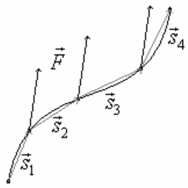
$\vec{s}$ = zurückgelegter Weg

$$\cos\alpha = \frac{F_0}{|\vec{F}|}$$

$$W = F_0 \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

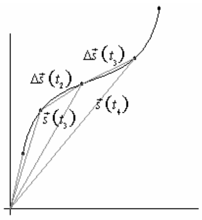
(3) $\vec{F}(x, y, z)$ = Vektorfeld (Kraftvektoren)



Ein Punkt bewege sich entlang der Kurve k und sei der Kraft $\vec{F}$ unterworfen.
$W = ?$

$$W \approx \vec{F}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{s}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{s}_3 + \ldots \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \cdot \vec{s}_j$$

(4) Die Kurve k sei gegeben durch die vektorielle Darstellung $\vec{s}(t)$ wobei t ein Parameter ist.



$$\vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1) = \Delta\vec{s}(t_1)$$

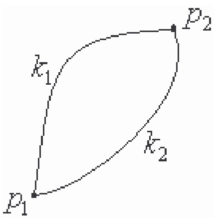
$$\vec{s}(t_3) - \vec{s}(t_2) = \Delta\vec{s}(t_2)$$

$$\Rightarrow \quad W \approx \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot \Delta\vec{s}(t_j) \quad \Rightarrow \quad W = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot \Delta\vec{s}(t_j) = \int^{k} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Def. 5.1

> Kurvenintegrale
>
> Es sei $\vec{s}(t)$ eine Kurve und $\vec{v}(x, y, z)$ ein Vektorfeld. Wenn jede beliebige Zerlegung
> $\left(\sum_{j=1}^{n} \vec{v}\left(x(t_j), y(t_j), z(t_j)\right) \cdot \Delta\vec{s}(t_j)\right)$ gegen die gleiche Zahl S für $n \to \infty$ konvergiert,
> dann heißt S Kurvenintegral
>
> Symbol: $\int^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ $\quad (k = \text{Kurve})$

Bsp2:



gilt: $W = \int^{k_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int^{k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \int^{k_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int^{k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$

gilt: $-\int^{k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int^{-k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \int^{k_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int^{-k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$

$k_1 + (-k_2) = k$

$\oint^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$

Def. 5.2

> Es sei k eine geschlossene Kurve und $\vec{v}(x, y, z)$ ein Vektorfeld $\quad \Rightarrow \quad \int^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

Satz 5.1

> Sei $\vec{s}(t)$ eine Kurve k
>
> $\vec{v}(x, y, z)$ ein Vektorfeld
>
> Kurve $\vec{s}(t)$: $\quad t_1 \le t \le t_2$
>
> $\Rightarrow \quad \int^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot s'(t) \cdot dt \qquad (s'(t) = \text{Tangentenvektor})$

Bew: $\int^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \frac{d\vec{s}}{dt} dt$

Bsp3: Kurve: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ Vektorfeld: $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\oint^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot s'(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t)\, dt = [\cos t]_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

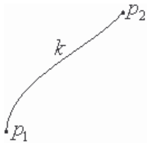
Bsp4: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le 1) \qquad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1-x \\ y \\ x-z \end{pmatrix}$

$$\int^{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v} \cdot s'(t) \cdot dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-x \\ y \\ x-z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt \underset{\substack{x=t \\ y=t^2 \\ z=0}}{=} \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t^2 \\ t-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_0^1 \left((1-t) + t^2 \cdot 2t\right) \cdot dt$$

$$= \int_0^1 \left(2t^3 - t + 1\right) = \left[2\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

Bsp5: Elektrische Feldstärke

$\vec{s}(t) =$ Kurve:



$$\Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \text{Spannung } U_{12}$$

speziell: $\vec{E} = \text{const}$

Kurve k: Geradenstück Länge L

$$U_{12} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot L$$

6 Wirbelfreie Felder

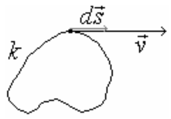
Def. 6.1

> Ein Vektorfeld $\vec{v}\left(x,y,z\right)$ heißt wirbelfrei, wenn für jede geschlossene Kurve gilt: $\oint \vec{v}\cdot d\vec{s}=0$

Bsp1: Flüssigkeit (Gas)

$\vec{v}\left(x,y,z\right)=$ Geschwindigkeitsvektoren

Annahme: Es gibt eine geschlossene Bewegung (geschlossene Feldlinie)



$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{s}=\oint |\vec{v}|\cdot|d\vec{s}|\cdot\cos\alpha \underset{\substack{\vec{v}\text{ und }d\vec{s}\\ \text{gleiche Richt.}}}{=} \oint |\vec{v}|\cdot|d\vec{s}|\cdot\cos 0=\oint |\vec{v}|\cdot|d\vec{s}|>0$$

Bsp2: Wirbelfreie Felder:

- Erdkraftfeld
- Elektrostatische Feldstärke
- Magnetische Feldstärke (evtl.)

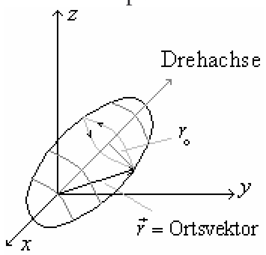
Def. 6.2

> Rotation
>
> $\vec{v}\left(x,y,z\right)$ sei Vektorfeld mit $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$
>
> $$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

Bsp3: $\vec{v}=\begin{pmatrix} x^2-y\\ y-z\\ x^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-y & y-z & x^4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 0-\left(-1\right)\\ -\left[4x^3-0\right]\\ 0--1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -4x^3\\ 1\end{pmatrix}$$

Bsp4: Starrer Körper



$\vec{v}\left(x,y,z\right)=$ Vektorfeld $=$ Geschwindigkeit bei Rotation

a) Geschwindigkeit $\vec{\omega}$

(1) $|\vec{\omega}|=\frac{2\pi}{T}$ $\left(T=\text{Umlaufzeit}\right)$

(2) $\vec{\omega}=$ hat Richtung Drehachse

b) $|\vec{v}|=\frac{2\cdot r_0\cdot\pi}{T}\underset{\sin\alpha=\frac{r_0}{|\vec{r}|}}{=}\frac{2\pi}{T}\cdot|\vec{r}|\cdot\sin\alpha=|\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\cdot\sin\alpha=|\vec{\omega}\times\vec{r}|$

$\vec{v}$ und $\vec{\omega}\times\vec{r}$ gleiche Richtung

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}}$

c) $\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \underset{\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{=} 2\vec{\omega}$

d) $\oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint |\vec{v}|\cdot|d\vec{s}|\cdot\cos\alpha \underset{\cos\alpha=1}{=} |\vec{v}|\cdot\oint d\vec{s} = |\vec{v}|\cdot 2r_0\pi = \frac{2r_0\pi}{T}2r_0\pi = \left(r_0{}^2\pi\right)2\cdot\frac{2\pi}{T} = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{Fläche}}\cdot 2\vec{\omega}$

$= |\vec{a}|\cdot|\operatorname{rot}\vec{v}|\cdot\cos\beta \underset{\beta=\sphericalangle(\vec{a},\operatorname{rot}\vec{v})=0}{=} \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{v} = \int^{A} \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{a}$

d.h.: $\oint^{k} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint^{A} \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{a}$

Satz 6.1

Integralsatz von Stokes
Vorraussetzung: Es sei A ein Flächenstück mit der Begrenzungskurve k und $\vec{v}(x,y,z)$ ein Vektorfeld
Behauptung: $\oint^{k} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint^{A} \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{a}$

Folgerung:
Satz 6.2

$$\boxed{\vec{v}(x,y,z) \text{ sei wirbelfrei} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}}$$

Bsp5: Elektrostatik: $\vec{E} =$ elektr. Feldstärke $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}$

7 Potentialtheorie

Bsp1: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ -z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right) \quad \Rightarrow$ Es gibt ein u, so dass $\vec{v} = \operatorname{grad}(u)$ (Potential)

Bsp2: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ yx \\ y \end{pmatrix}$

Annahme: $\vec{v} = \operatorname{grad}(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} u_x &= x \\ u_y &= y \cdot x \\ u_z &= y \end{aligned} \qquad \text{Satz von Schwartz:} \quad u_{xy} = u_{yx} \qquad \left.\begin{aligned} u_{xy} &= 0 \\ u_{yx} &= y \end{aligned}\right\rangle \neq$$

Def. 7.1

> $\vec{v}$ = Vektorfeld
> Falls es eine Funktion $u = u(x, y, z)$ gibt, so dass $\vec{v} = \operatorname{grad}(u)$ ist, heißt u Potentialfunktion oder Potential.
> In diesem Fall heißt $\vec{v}$ ein konservatives Feld oder ein wirbelfreies Feld.

Existenz eines Potentials

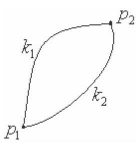
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ Vektorfeld; $\quad \vec{v} = \operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_x &= v^1 \\ u_y &= v^2 \\ u_z &= v^3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_{xy} &= u_{yx} \\ u_{yz} &= u_{zy} \\ u_{zx} &= u_{xz} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} {v^1}_y &= {v^2}_x \\ {v^2}_z &= {v^3}_y \\ {v^3}_x &= {v^1}_z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} {v^1}_y - {v^2}_x \\ {v^2}_z - {v^3}_y \\ {v^3}_x - {v^1}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

Satz 7.1

> Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ besitzt genau dann ein Potential, wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$

d.h.: $\vec{v}$ hat Potential $\quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \oint_{k} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad \int_{k_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{-k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{k_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{k_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = u(p_2)$$

Anmerkung:

Wenn $\vec{v}$ ein konservatives Feld ist $\quad \Rightarrow \quad u(x, y, z) = \int_{p_1}^{p_2(x,y,z)} \vec{v} \cdot d\vec{s} =$ Potential $\qquad (p_1 = \text{beliebig})$

Bsp3: Elektrostatik: $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Existiert Potential φ: $\vec{E} = \operatorname{grad} \varphi$ (elektrostatisches Potential)

Bsp4: Gravitationsfeld: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Existiert Potential u: $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ (u = potentialle Energie)

Bsp5: Hydrostatik

$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \operatorname{grad} p \qquad (p = \text{Druck})$

8 Die Maxwell'schen Gleichungen

$\vec{H}$ = Magnetische Feldstärke

$\vec{E}$ = Elektrische Feldstärke

$\vec{g}$ = Stromdichte $\Leftrightarrow$ $\vec{g} \cdot \vec{a} = I$ = Stromstärke durch $\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ $\int^{A} \vec{g} \cdot d\vec{a} = I$

ρ = Ladungsdichte

$\mu,\ \mu_0,\ \varepsilon,\ \varepsilon_0$

Maxwell – Gleichungen

$$\mu \cdot \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{E}$$

$$\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{g}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho$$

Bsp1: Induktiongesetz

Def: $\int_{p_1}^{p_2} {}^{k}\, \vec{E} \cdot d\vec{s} = u$ $\qquad (u = E \cdot l)$

$$\mu \cdot \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \int^{A} \mu \cdot \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{H} \cdot d\vec{a} = -\int^{A} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{a} \qquad \left(\int^{A} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{a} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{ind} \right)$$

$$\Rightarrow \quad u_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \underbrace{\int^{A} \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \cdot d\vec{a}}_{\text{Kraftfluß}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \Phi}$$

Bsp2: Magnetische Feldstärke in einer Spule

gesucht: $\vec{H}$ in der Spule

Annahme: $u = \text{const}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \int^{A} \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{a} = \int^{A} \vec{g} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{Stokes} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int^{A} \vec{g} \cdot d\vec{a} \quad \Rightarrow \quad H \cdot l = I_{ges} = I \cdot n \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I \cdot n}{l} \qquad \begin{pmatrix} l = \text{Länge der Spule} \\ n = \text{Windungen} \end{pmatrix}$$

Bsp3: Elektromagnetische Wellen

Vakuum: $\rho = 0$

$\varepsilon = \mu = 1$

$\vec{g} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \mu \cdot \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{E} \\ \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H} \end{array}} \qquad \text{Auswertung:} \quad \vec{E} \perp \vec{H}$$

XI GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1 Einführung und Grundbegriffe

1.1 Beipiele

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung mit den unbekannten Größen $x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)$.
Gesucht ist die Lösung $y(x)$.

Bsp1:

Differentialgleichung (Dgl)	Lösung
$y - y' = 0$	$y = e^x$
$y'' + y = 0$	$y = \sin x$
$y' - 1 = 0$	$y = x$
$y' + y = 3(x+1)$	$y = 3x$
$x^2 + 2xy + 2y' - y'' = x^2 + 2x$	$y = 1$

Bsp2: Bakterienkultur

$y(t) =$ Anzahl der Bakterien zur Zeit t

$y'(t) = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} =$ Zunahme der Bakterien zum Zeitpunkt t

Zunahme ~ Anzahl $\Rightarrow$ $y' \sim y$ $\Rightarrow$ $\boxed{y' = \alpha y}$ Dgl

Lösung: $y = A \cdot e^{\alpha t}$

Bsp3: Grundgleichung der Mechanik

$y(t) =$ Weg zur Zeit t

$y'(t) =$ Geschwindigkeit

$y'(t) =$ Beschleunigung

Grundgleichung der Mechanik: $F = m \cdot a$

$\Rightarrow$ $\boxed{F = m \cdot y''}$ Dgl

Bsp4: Harmonische Schwingungen

$y(t) =$ Auslenkung aus Ruhelage

$$F \sim -y(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} F = -k \cdot y \\ F = m \cdot y'' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad my'' = -ky$$

$\Rightarrow$ $\boxed{my'' + ky = 0}$ Dgl

Lösung: $y = A \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t$

Bsp5: Stromkreis (Reihenschaltung von R und L (DC))

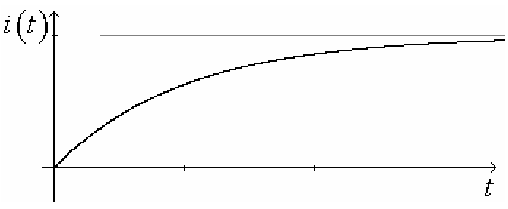
$u(t) =$ Stormstärke

$u(t) =$ Spannung

$u(t) = u =$ const

$\Rightarrow$ $\boxed{l \cdot \frac{di}{dt} = U - i(t) \cdot R}$ Dgl

Lösung: $i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $\quad L = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{U}{R}$



Bsp6: Ein Massepunkt sei im Raum der Schwerekraft der Erde ausgesetzt.

Beschleunigung $= y''(t)$

$\boxed{y'' = -g}$ Dgl

$y' = -gt = v$

$y = \frac{1}{2} gt^2$

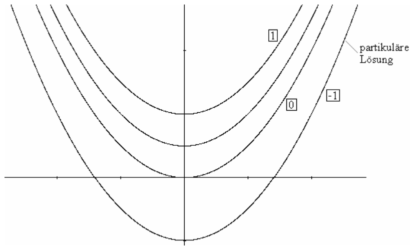
Bsp7: Elektrischer Schwingkreis (Parallelschaltung von C und L (AC))
$i(t) =$ Stromstärke

$\boxed{\frac{i(t)}{C} + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} = 0}$ Dgl

Lösung: $i(t) = i_0 \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \qquad i_0 = \text{const}$

1.2 Grundbegriffe

Bsp1: $\boxed{y' - x = 0}$ Dgl $\Rightarrow \quad y' = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{2} x^2 + c}$ Lösung



d.h. (1) Die Lösungen bilden eine Kurvenschar
(2) Jede Lösung ist eine partikuläre Lösung

Bsp2: $\boxed{y'' - y' = 0}$ Dgl

Lösungen: $y = c_1 e^x + c_2$

Probe: $y = c_1 e^x + c_2$

$$\left.\begin{aligned} y' &= c_1 e^x \\ y'' &= c_1 e^x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y'' - y' = 0$$

Lösung: Kurvenschar mit 2 Parametern

Def. 1.1

(1) Eine Gleichung der Form $F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0$
heißt gewöhnliche Differentialgleichung $n-$ter Ordnung

(2) Die Funktion $y = f(x, c_1, \ldots c_n)$, die für alle Konstanten $c_1, \ldots c_n$ die Differentialgleichung erfüllt und die alle Lösungen umfasst, heißt allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(3) Setzt man in $y = f(x, c_1, \ldots c_n)$ für die Konstanten spezielle Werte ein erhält man eine spezielle oder partikuläre Lösung.

Anmerkung:
Die Lösungen bilden eine $n-$parametrike Kurvenschar. Jede einzelne Kurve ist eine partikuläre Lösung.

Bsp3: $xy'' - 3y' + 1 = 0$ Dgl 2. Ordnung

$\frac{1}{y'''} + y' \cdot y - \sin y'' = x$ Dgl 3. Ordnung

$y' - y = 0$ Dgl 1. Ordnung

Bsp4: $y' - \sqrt{1 - y^2} = 0$ Dgl 1. Ordnung

Lösung: $y = \sin(x + c) =$ Kurvenschar

Probe: $y' = \cos(x + c) = \sqrt{1 - \sin^2(x + c)} = \sqrt{1 - y^2}$

Bsp5: $y'' = 0$ Dgl 2. Ordnung

$y' = c_1$

$y = c_1 x + c_2$ allgemeine Lösung

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y &= x \\ y &= 3x + 4 \end{aligned}\right\} \text{spezielle Lösung}$$

Bsp6: $y''' = 0$

$y'' = c_1$

$y' = c_1 x + c_2$

$y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_3$

2 Differentialgleichungen erster Ordnung

2.1 Das Richtungsfeld

Def. 2.1

Eine Dgl 1. Ordnung in der Gestalt $F(x, y, y') = 0$ heißt implizit.
Läßt sie sich nach y' auflösen, dann heißt $y' = f(x, y)$ explizite Darstellung der Dgl.

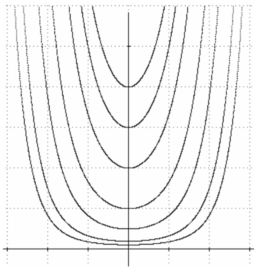
Bsp1: $\operatorname{arsinh}\left(y' - \sqrt{y}\right) \cdot \tan(y' \cdot x) = 0$ implizit

$y' = xy^2 - x$ explizit

Def. 2.2

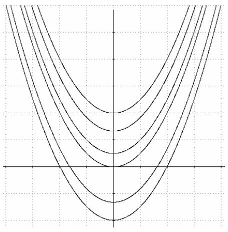
Richtungsfeld
Die Dgl $y' = f(x, y)$ definiert für jeden Punkt (x, y) eine Richtung y'.
Trägt man alle Richtungen in ein Koordinatensystem ein, erhält man ein Richtungsfeld.

Bsp2: $y' = x \cdot y$

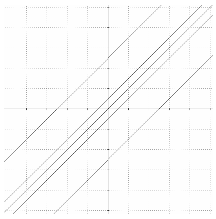


Die Verbindungen aller Richtungen ergeben die allgemeine Lösung als Kurvenschar

Bsp3: $y' = x$



Bsp4: $y' = 1$



2.2 Die Dgl $y' = f(x)$

$$\underbrace{\boxed{y' = f(x)}}_{\text{Dgl}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\boxed{y = \int f(x)\,dx + c}}_{\text{Lösung}}$$

Bsp1: $y' = \sin x$ Dgl

$y = -\cos x + c$ allg. Lösung

2.3 Die lineare homogene Dgl

Def. 2.3

Die Dgl $y' = a(x) \cdot y$ heißen lineare homogene Dgl.

Bsp: $y' = x^2 \cdot y$

$y' = \cos x \cdot y$

Lösungsverfahren

$$y' = a(x)\cdot y \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y} = a(x) \quad\Rightarrow\quad \int\frac{y'}{y}dx = \int a(x)dx + c \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \int a(x)dx + c$$

$$\Rightarrow\quad |y| = e^{\int a(x)dx + c} = y \quad\Rightarrow\quad y = e^{\int a(x)dx}\cdot\underbrace{e^c}_{=c'} = c'\cdot e^{\int a(x)dx}$$

Bsp1: $y' = xy \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y} = x \quad\Rightarrow\quad \int\frac{y'}{y}dy = \frac{x^2}{2} + c \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \quad\Rightarrow\quad e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$

$\Rightarrow\quad |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \quad\Rightarrow\quad y = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}\cdot e^c = c'\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

Bsp2: $y' = \sin(x)\cdot y \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y} = \sin x \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = -\cos x + c \quad\Rightarrow\quad |y| = e^{-\cos x + c} = e^c\cdot e^{-\cos x} \quad\Rightarrow\quad y = c'\cdot e^{-\cos x}$

Bsp3: $y' = \frac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \ln|x| + c \quad\Rightarrow\quad |y| = |x|\cdot e^c \quad\Rightarrow\quad y = c'\cdot x$

Bsp4: $y' = x^4\cdot y \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y} = x^4 \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \frac{x^5}{5} + c \quad\Rightarrow\quad |y| = e^{\frac{1}{5}x^5 + c} \quad\Rightarrow\quad y = c'\cdot e^{\frac{1}{5}x^5}$

2.4 Die lineare inhomogene Dgl

Def. 2.4

$$\boxed{\text{Die Dgl } y' = a(x)\cdot y + b(x) \text{ heißt lineare homogen.}}$$

Bsp: $y' = x^2\cdot y + \sin x$

Lösungsverfahren (Variation der Konstanten)

$\boxed{y' = a(x)\cdot y + b(x)}$

Schritt 1: Lösung der homogenen Dgl

$$y' = a(x)\cdot y \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y} = a(x) \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \int a(x)dx + c \quad\Rightarrow\quad y = e^{\int a(x)dx}\cdot\underbrace{e^c}_{\gamma} \quad\Rightarrow\quad y = \gamma\cdot e^{\int a(x)dx}$$

Schritt 2: Variation der Konstanten γ

Ansatz:

$$y = \gamma(x)\cdot e^{\int a(x)dx}$$

$$y' = \gamma'(x)\cdot e^{\int a(x)dx} + \gamma(x)\cdot e^{\int a(x)dx}\cdot a(x)$$

In Dgl einsetzen:

$$y' = \gamma'(x)\cdot e^{\int a(x)dx} + a(x)\cdot\underbrace{\gamma(x)\cdot e^{\int a(x)dx}}_{y} = a(x)\cdot y + b(x) \quad\underset{\text{es kann immer gekürzt werden}}{\Rightarrow}\quad \gamma'(x)\cdot e^{\int a(x)dx} = b(x)$$

$$\Rightarrow\quad \gamma'(x) = b(x)\cdot e^{-\int a(x)dx} \quad\Rightarrow\quad \gamma(x) = \int b(x)\cdot e^{-\int a(x)dx}dx + c$$

Lösung:

$$y = \left[\int b(x)\cdot e^{-\int a(x)dx}dx + c\right]\cdot e^{\int a(x)dx}$$

Bsp1: $y' = \frac{1}{x}y + x^2$

(1) homogen: $y' = \frac{1}{x}\cdot y \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \ln|x| + c \quad\Rightarrow\quad |y| = |x|\cdot e^c \quad\Rightarrow\quad y = \gamma\cdot x$

(2) Ansatz: $y = \gamma(x)\cdot x \qquad (\gamma(x) = ?)$

$$y' = \gamma'(x)\cdot x + \gamma(x)\cdot 1 = \frac{1}{x}\cdot\underbrace{y}_{y=\gamma(x)\cdot x} + x^2 \quad\Rightarrow\quad \gamma'(x)\cdot x = x^2 \quad\Rightarrow\quad \gamma'(x) = x \quad\Rightarrow\quad \gamma(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

Lösung: $y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x = \frac{x^3}{2} + cx$

Bsp2: $y' = \sin(x) \cdot y - \sin y$

(1) homogen: $y' = \sin(x) \cdot y \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-\cos x} \cdot e^{c} \quad \Rightarrow \quad y = \gamma \cdot e^{-\cos x}$

(2) Ansatz: $y = \gamma(x) \cdot e^{-\cos x}$

$$y' = \gamma'(x) \cdot e^{-\cos x} + \underbrace{\gamma(x) \cdot e^{-\cos x}}_{y} \cdot \sin x = \sin(x) \cdot y - \sin x \quad \Rightarrow \quad \gamma'(x) \cdot e^{-\cos x} = -\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \gamma'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \gamma(x) = -\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx \underset{\substack{z=\cos x \\ dz=-\sin x \cdot dx}}{=} \int e^{z} dz = e^{z} + c = e^{\cos x} + c$$

Lösung: $y = \left[e^{\cos x} + c\right] \cdot e^{-\cos x} = 1 + c \cdot e^{-\cos x}$

Bsp3: $y' = y + 1$

(1) homogen: $\dfrac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \gamma \cdot e^{x}$

(2) Ansatz: $y = \gamma(x) \cdot e^{x}$

$$y' = \gamma'(x) \cdot e^{x} + \gamma(x) \cdot e^{x} = y + 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma'(x) \cdot e^{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \gamma(x) = -e^{-x} + c$$

Lösung: $y = \left(-e^{-x} + c\right) \cdot e^{x} = -1 + c \cdot e^{x} = y$

Bsp4: $y' = 3y + 4$

(1) homogen: $y = \gamma \cdot e^{3x}$

(2) Ansatz: $y = \gamma(x) \cdot e^{3x}$

$$y' = \gamma'(x) \cdot e^{3x} + \gamma(x) \cdot e^{3x} \cdot 3 = 3y + 4 \quad \Rightarrow \quad \gamma'(x) \cdot e^{3x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \gamma'(x) = 4 \cdot e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(x) = 4 \cdot \int e^{-3x} dx + c = 4\left[-\frac{1}{3} e^{-3x}\right] + c = -\frac{4}{3} e^{3x} + c = y$$

Lösung: $y = \left[-\dfrac{4}{3} e^{-3x} + c\right] e^{3x} = -\dfrac{4}{3} + c e^{3x}$

Bsp5: Reihenschaltung von R und L bei $u = \text{const}$ und $i(t) = \text{Stromstärke}$

Dgl: $L \cdot i'(t) = u - i(t) \cdot R \quad \Rightarrow \quad i'(t) = -\dfrac{R}{L} \cdot i(t) + \dfrac{U}{L}$

(1) homogen: $i'(t) = -\dfrac{R}{L} \cdot i(t) \quad \Rightarrow \quad \ln|i(t)| = -\dfrac{R}{L} \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln|i(t)| = -\dfrac{R}{L} t + c \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{R}{L} t} \cdot \gamma$

(2) Ansatz: $i(t) = \gamma(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$

$$i'(t) = \gamma'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + \gamma(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) = -\frac{R}{L} \cdot i(t) + \frac{U}{L} \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma'(t) = \frac{U}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \gamma(x) = \frac{U}{L} \cdot \left(e^{\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \frac{L}{R}\right) + c$$

Lösung: $i(t) = \left(\dfrac{U}{L} \cdot \left(e^{\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \dfrac{L}{R}\right) + c\right) e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \dfrac{U}{R} + c e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

Bestimmung der Konstanten: $t = 0: \quad i(0) = 0 = \dfrac{U}{R} + c e^{0} \quad \Rightarrow \quad c = -\dfrac{U}{R}$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad i(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

2.5 Die Dgl $y' = f(x) \cdot g(y)$ (Trennung der Variablen)

Verfahren: Dgl: $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \text{nach } y \text{ auflösen} \quad \Rightarrow \quad y = \ldots \quad (\text{Lösung})$$

Bsp1: $y' = x \cdot y^2$

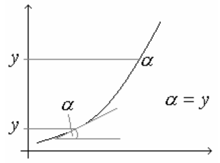
$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int y^{-2} \cdot dy = \int x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad -y^{-1} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -y = \frac{2}{x^2 + 2c} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + \overline{c}}$$

Bsp2: $y' = 1 + y^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \arctan y = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \tan(x + c)$$

Bsp3: Welche Funktion hat die Eigenschaft, dass der Tangentenwinkel der Abszisse gleich der Ordinate y ist?



$$\tan\alpha = y' \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan y'$$

$$\arctan y' = y \quad \Rightarrow \quad y' = \tan y$$

Lösung der Dgl: $y' = \frac{dy}{dx} = \tan y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\tan y} = dy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\tan y} = \int dx \qquad \int \frac{\cos y}{\sin y} \cdot dy = \int dx$

$$\Rightarrow \quad \ln|\sin y| = x + c \quad \Rightarrow \quad \sin y = e^{x+c} \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin\left(e^{x+c}\right)$$

3 Differentialgleichungen höherer Ordnung

[1] $y^{(n)} = f(x)$
n mal integrieren $\Rightarrow$ $y = \ldots$

Bsp1: $y'' = x$

$$y' = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Bsp2: $y'' = a$ (Beschleunigung = const) $y = y(t) = \text{Weg} - \text{Zeit} - \text{Fkt}$

$$y' = at + c$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 + c_1 t + c_2$$

[2] $y'' \cdot y' = f(x)$

gilt: $y'' \cdot y' = \frac{1}{2}\left(y'^2\right)' \Rightarrow \left(y'^2\right)' = 2 \cdot f(x) \Rightarrow y'^2 = 2\int f(x)\,dx + c_1$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{\int f(x)\,dx + c_1} \Rightarrow y = \int \sqrt{\int f(x)\,dx + c_1} \cdot dx + c_2$$

Bsp1: $y'' \cdot y' = x$

$$\frac{1}{2}\left(y'^2\right)' = x \Rightarrow \left(y'^2\right)' = 2x \Rightarrow y'^2 = x^2 + c_1 \Rightarrow y' = \sqrt{x^2 + c_1}$$

$$\Rightarrow y = \int \sqrt{x^2 + c_1} + c_2 \underset{\text{Formel sammlung}}{=} \frac{1}{2}\left[x \cdot \sqrt{x^2 + c_1} + c_1 \cdot \operatorname{arsinh}\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right] + c_2$$

Bsp2: $y'' \cdot y' = 1$

$$\frac{1}{2}\left(y'^2\right)' = 1 \Rightarrow y'^2 = 2x + c \Rightarrow y' = \sqrt{2x + c} \Rightarrow$$

$$y = \int \sqrt{2x + c_1} \cdot dx + c_2 \underset{\substack{z = 2x + c \\ dz = 2 \cdot dx}}{=} \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}} \cdot dz + c_2 = \frac{1}{3}\sqrt{\left(2x + c_1\right)^3} + c_2$$

[3] Dgl: $F(x, y', y'') = 0$
Substitution: $y' = 2 \Rightarrow F(x, z, z') = 0$

Bsp1: $y' - y'' = 0$

$$\underset{y' = z}{\Rightarrow} z - z' = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = 1 \Rightarrow \ln|z| = x + c \Rightarrow |z| = e^{x+c} = e^x \cdot e^c \Rightarrow z = \bar{c} \cdot e^x$$

gilt: $y' = z = \bar{c}_1 \cdot e^x \Rightarrow y = c_1 \cdot e^x + c_2$

Bsp2: $y'' - xy' = 0$

$$\underset{y = z'}{\Rightarrow} z' - xz = 0 \Rightarrow z' = xz \Rightarrow \frac{z'}{z} = x \Rightarrow \ln|z| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot c_1 = y' \Rightarrow c_1 \int e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx + c_2$$

4 Lineare Differentialgleichungen

4.1 Grundlagen

Def. 4.1

> Eine Differentialgleichung $\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot y^{(j)} = a_0(x)\cdot y + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y'' + \ldots a_n(x)\cdot y^{(n)} = r(x)$
>
> heißt lineare Dgl. Sie heißt homogen falls $r(x)=0$. Sie heißt inhomogen falls $r(x)\neq 0$.

Bsp1: $y + x\cdot y' = 0$ lineare homogene Dgl 1. Ordnung

$y' + xy' = x^2$ inhomogene: Variation der Konstanten

$y''' + xy'' + x^2 y' - y = \sin x$ inhomogen, linear 3. Ordnung

Bsp2: $\frac{2}{x^2}\cdot y - \frac{2}{x}\cdot y' + y'' = 0$

Lösung: $y = x$ Probe: $\frac{2}{x^2}\cdot x - \frac{2}{x}\cdot 1 + 0 = 0$

Lösung: $y = 2x$ Probe: $\frac{2}{x^2}\cdot 2x - \frac{2}{x}\cdot 2 + 0 = 0$

Lösung: $y = 7x$

Lösung: $y = c\cdot x$ Probe: $\frac{2}{x^2}\cdot cx - \frac{2}{x}\cdot c + 0 = 0$

Satz 4.1

> Ist $z(x)$ eine spezielle Lösung einer homogenen linearen Dgl, dann ist es auch $c\cdot z(x)$, wobei c eine beliebige Konstante ist.

Bew: Sei $w = c\cdot z(x)$

$$\underset{w \text{ einsetzen}}{\Rightarrow} \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot w^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot c\cdot z^{(j)}(x) = c\cdot \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot z^{(j)}(x) = c\cdot 0 = 0$$

Bsp2: Fortsetzung

$\frac{2}{x^2}\cdot y - \frac{2}{x}\cdot y' + y'' = 0$

spezielle Lösung: $y = x$

$y = x^2$

Probe: $\frac{2}{x^2}\cdot x^2 - \frac{2}{x}\cdot 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow$ Lösung: $y = x + x^2$

Satz 4.2

> Sind $z_1(x)$ und $z_2(x)$ spezielle Lösungen einer homogenen linearen Dgl, dann ist es auch $w = z_1(x) + z_2(x)$ (Superposition der Lösungen)

Bew: $\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot w^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot\left[z_1^{(j)}(x) + z_2^{(j)}(x)\right] = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot z_1^{(j)}(x) + \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot z_1^{(j)}(x) = 0 + 0 = 0$

Bsp2: Fortsetzung

$\frac{2}{x^2}\cdot y - \frac{2}{x}\cdot y' + y'' = 0$

(1) spezielle Lösung: $\overline{y}_1 = x \Rightarrow y_1 = c_1\cdot x$

(2) spezielle Lösung: $\overline{y}_1 = x^2 \Rightarrow y_1 = c_2\cdot x^2$

(3) $y = c_1\cdot x + c_2\cdot x^2 \Rightarrow$ Lösung = allgemeine Lösung

Satz 4.3

> Die lineare homogene Dgl $a_0(x)\cdot y + a_1(x)\cdot y' + \ldots a_n(x)\cdot y^{(n)} = 0$
> besitzt n spezielle Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$, so dass die allgemeine Lösung
> $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n$ alle Lösungen umfasst. $\left(c_j = \text{const}\right)$

Bsp3: $y' + y''' = 0$ Dgl

spezielle Lösungen: $y_1 = \sin x$

$y_2 = \cos x$

$y_3 = 1$

$y_{\text{allg}} = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot 1$

Bsp4: $\frac{2}{x^2}\cdot y - \frac{2}{x}\cdot y' + y'' = \frac{1}{x^2}$ (inhomogen)

$y_0 = \frac{1}{2}$

$y = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 \quad \Rightarrow$ Lösung der homogenen Dgl. (Bsp2)

allgemeine Lösungen der inhomogenen Dgl $\boxed{y = \frac{1}{2} + \left(c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2\right)}$

Probe: $\frac{2}{x^2}\cdot y - \frac{2}{x}\cdot y' + y'' = \frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{2} + c_1 x + c_2 x^2\right] - \frac{2}{x}\left[c_1 + 2c_2 x\right] + 2c_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2c_1}{x} + 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + 2c_2 = \frac{1}{x^2}$

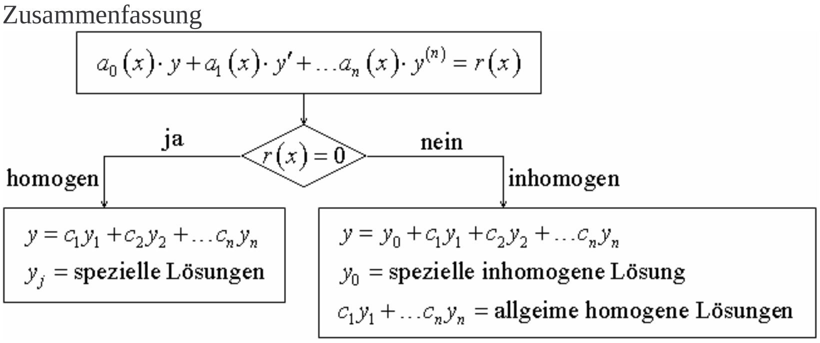
Satz 4.4

> Gegeben sei die lineare inhomogene Dgl $a_0(x)\cdot y + a_1(x)\cdot y' + \ldots a_n(x)\cdot y^{(n)} = r(x)$.
> Die allgemeine Lösung erhält man, indem man zu der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl addiert. $y = y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n$

Bew: einsetzen:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot\left[y_0^{(j)} + \left(c_1 y_1^{(j)} + \ldots c_n y_n^{(j)}\right)\right] = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot\left(y_0^{(j)} + y_n^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot y_0^{(j)} + \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\cdot y_n^{(j)} = r(x) + 0 = r(x)$$

Zusammenfassung



4.2 Lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten

4.2.1 homogene Dgln

Def. 4.2

> Die Dgl $a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y'' + \ldots a_n \cdot y^{(n)} = 0$ mit $a_j = \mathbb{R}$,
> heißt lineare homogene Dgl mit konstanten Koeffizienten.

Bsp1: $3y'' - 2y' + y = 0$

$y^{(4)} - 3y''' + y = 0$

Bsp2: $a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y'' + \ldots a_n \cdot y^{(n)} = 0$

Ansatz: $y = e^x \qquad (\lambda = ?)$

$$\Rightarrow \quad a_0 e^{\lambda x} + a_1 \underbrace{e^{\lambda x}\lambda}_{y'} + a_2 \underbrace{e^{\lambda x}\lambda^2}_{y''} + \ldots a_n \underbrace{e^{\lambda x}\lambda^n}_{y^{(n)}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{\lambda x} \underbrace{\left[a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots a_n\lambda^n \right]}_{\substack{\text{charakteristisches Polynom } P_n(x) \\ \lambda = \text{Nullstelle von } P_n(x)}} = 0$$

Bsp3: $y'' - 2y' + 2y = 0$

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{2x} \end{bmatrix} \qquad y_{\text{allg}} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Bsp4: $y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = 1$

$y_1 = e^x$

$y_2 = ? = e^x \cdot x$

Probe zu y_2: $y = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$y'' = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$$

$$\Rightarrow \quad y_2'' - 2y_2' + y_2 = e^x(x+2) - 2e^x(1+x) + xe^x = 0$$

$y_{\text{allg}} = c_1 e^x + c_2 x e^x$

Bsp5: $y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = 1 \pm j$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{(1+j)x} \\ y_2 = e^{(1-j)x} \end{array}\right\} \quad y_{\text{allg}} = c_1 e^{(1+j)x} + c_2 e^{(1-j)x}$$

Eliminieren des komplexen Anteils

$$y_{\text{allg}} = c_1 e^{(1+j)x} + c_2 e^{(1-j)x} = c_1 e^x e^{jx} + c_2 e^x e^{-jx} \underset{\left[\substack{\text{Euler} \\ e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x \\ e^{-jx} = \cos x - j \cdot \sin x}\right]}{=} c_1 e^x (\cos x + j \cdot \sin x) + c_2 e^x (\cos x - j \cdot \sin x)$$

$$= (c_1 + c_2) e^x \cdot \cos x + (c_1 j - c_2 j) e^x \cdot \sin x = \hat{c}_1 e^x \cdot \cos x + \hat{c}_2 e^x \cdot \sin x \qquad (\hat{c}_2 = \text{komplex} \quad \Rightarrow \quad \text{reell})$$

Lösung von $a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots a_n y^{(n)} = 0$

Man löse die charakteristische Gleichung $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots a_n\lambda^n = 0$ und erhält die Nullstelle λ

[1] λ reell, Vielfachheit ist k

$$\Rightarrow \quad y_1 = e^{\lambda x}; \quad y_2 = xe^{\lambda x}; \quad y_3 = x^2 e^{\lambda x}; \quad \ldots; \quad y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}$$

[2] $\lambda = u + vj$ komplex, Vielfachheit 1

$$\Rightarrow \quad y_1 = e^{ux}\cos(vx); \quad y_2 = e^{ux}\sin(vx)$$

[3] $\lambda = u + vj$ komplex, Vielfachheit k

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} y_1 = e^{ux}\cos(vx) & y_{k+1} = e^{ux}\sin(vx) \\ y_2 = xe^{ux}\cos(vx) & y_{k+2} = xe^{ux}\sin(vx) \\ y_3 = x^2 e^{ux}\cos(vx) & y_{k+3} = x^2 e^{ux}\sin(vx) \\ \ldots & \ldots \\ y_k = x^{k-1} e^{ux}\cos(vx) & y_{2k} = x^{k-1} e^{ux}\sin(vx) \end{array}$$

Bsp6: $y^{(4)} - 6y''' + 17y'' - 28y' + 20y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 17\lambda^2 - 28\lambda + 20 = 0$

Nullstellen: $\lambda_{1/2} = 2$ (zweifach)

$\lambda_3 = 1 + 2j$

$\lambda_4 = 1 - 2j$

$y_1 = e^{2x}$

$y_2 = xe^{2x}$

$y_3 = e^x \cos 2x$

$y_4 = e^x \sin 2x$

$\Rightarrow \quad y_{\text{allg}} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^x \cos 2x + c_4 e^x \sin 2x$

Bsp7: $y'' + \omega^2 y = 0$ (Schwingungsgleichung)

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\omega j = 0 \pm \omega j$

$y_1 = e^{0x} \cdot \cos \omega x = \cos \omega x$

$y_2 = e^{0x} \cdot \sin \omega x = \sin \omega x$

$\Rightarrow \quad y_{\text{allg}} = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$

Bsp8: $y^{(4)} - y = 0$

$\lambda^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, -1, j, -j$

$y_1 = e^x$

$y_2 = e^x$

$y_3 = e^{0x} \cdot \cos x = \cos x$

$y_4 = e^{0x} \cdot \sin x = \sin x$

$\Rightarrow \quad y_{\text{allg}} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

Bsp9: Gedämpfte Schwingung (Federpendel)

(1) $F =$ Rücktreibende Kraft

$F \sim -s(t) \quad \Rightarrow \quad F = -k \cdot s(t)$ ($k =$ Federkonstante)

(2) Reibung: $R \sim -v =$ Geschwindigkeit $= -s'(t) \quad \Rightarrow \quad R = d \cdot s'(t)$

(3) $F = m \cdot a = m \cdot s''(t)$

$\Rightarrow \quad m \cdot s'' + d \cdot s' + k \cdot s = 0$

Lösung der Dgl:

charakteristische Gleichung: $m\lambda^2 + d\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

Schwingung $\Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 < \frac{k}{m} 4m^2 = 4 \cdot k \cdot m$

$$\lambda = -\underbrace{\frac{d}{2m}}_{\delta} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}}_{\omega}\, j = -\delta \pm \omega j$$

$\Rightarrow \quad s_1 = e^{-\delta t} \cos \omega t$

$s_2 = e^{-\delta} \sin \omega t$

Frequenz: $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}$

4.2.2 inhomogene lineare Dgl

Satz 4.5

> gegeben: $a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y'' + \ldots a_n \cdot y^{(n)} = r(x)$
>
> sei: $z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n$ allgemeine Lösung der homogenen Dgl und
> y_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.
>
> dann ist $y = c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n$ allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

Bew: identisch mit Satz 4.2

Bsp1: $y'' + y = x$

(1) homogen: $y'' + y = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm j = 0 \pm j$

$y_1 = e^{0x} \cos x = \cos x$

$y_2 = e^{0x} \sin x = \sin x$

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(2) eine spezielle Lösung $y_0 = x$

(3) $y_{\text{allg}} = x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Bsp2: $y'' + y = 1 + x^2$

(1) homogen: $y'' + y = 0 \underset{\text{Bsp1}}{\Rightarrow} y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(2) spezielle inhomogene Lösung:

Ansatz: $y_0 = a + bx + cx^2$

$y_0' = b + 2cx$

$y_0'' = 2c$

in Dgl einsetzen $\Rightarrow \quad y_0'' + y_0 = 2x + \left(a + bx + cx^2\right) = \underbrace{\left(2c + a\right)}_{1} + \underbrace{b}_{0} x + \underbrace{c}_{1} x^2 \overset{!}{=} 1 + x^2$

$$\Rightarrow \quad 2c + a = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_0 = -1 + x^2$$

(3) $y_{\text{allg}} = \left(-1 + x^2\right) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Bsp3: $y'' + y = x - 2x^2 + x^3$

(1) homogen: $y'' + y = 0 \underset{\text{Bsp1}}{\Rightarrow} y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(2) Ansatz: $y_0 = a + bx + cx^2 + dx^3$

$y_0' = b + 2cx + 3dx^2$

$y_0'' = 2c + 6dx$

in Dgl einsetzen $\Rightarrow \quad y_0'' + y_0 = \left(2c + 6dx\right) + \left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \underbrace{\left(2c + a\right)}_{0} + \underbrace{\left(6d + b\right)}_{1} x + \underbrace{c}_{-2} x^2 + \underbrace{d}_{1} x^3 \overset{!}{=} x - 2x^2 + x^3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2c + a = 0 \\ 6d + b = 1 \\ c = -2 \\ d = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 4 \\ b = -5 \\ c = -2 \\ d = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad y_0 = 4 - 5x - 2x^2 + x^3$$

(3) $y_{\text{allg}} = \left(4 - 5x - 2x^2 + x^3\right) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Satz 4.6

> $a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y'' + \dots a_n \cdot y^{(n)} = P_k\left(x\right) \qquad \left(P_k\left(x\right) = \text{Polynom vom Grad } k\right)$
> Eine spezielle Lösung findet man durch den unbestimmten Ansatz
> $y_0 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_m x^m \quad \left(m \geq k\right)$ wobei die b_j durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Bew: einsetzen

Bsp4: $y''' + 4y' = x^2$

inhomogen: Ansatz: $y = a + bx + cx^2$

$y' = b + 2cx$

$y'' = 2c$

$y''' = 0$

einsetzen $\Rightarrow \quad 0 + 4\left(b + 2cx\right) = x^2$ kein Koeffizientenvergleich möglich neuer Ansatz: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

$y' = b + 2cx + 3dx^2$

$y'' = 2c + 6dx$

$y''' = 6d$

einsetzen $\Rightarrow \quad 6d + 4\left(b + 2cx + 3dx^2\right) = x^2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 12d = 1 \\ 6d + 4b = 0 \\ 8c = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[d = \frac{1}{12} \mid 4b = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{6} \mid c = 0 \right]$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x^3$$

Anmerkung:
Steht auf der rechten Seite der Dgl das Polynom $P_k(x)$ (siehe Satz 4.6), wähle man als Ansatz für die inhomogenen Lösungen ein Polynom vom Grade k. Wenn dieser Ansatz nicht zum Erfolg führt, erhöhe man den Polynomgrad um 1.

Bsp5: $y' - y = 7$

(1) homogen: $y' - y = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = e^x \quad \Rightarrow \quad y_h = ce^x$

(2) Ansatz: $y_0 = a \quad \Rightarrow \quad 0 - a = 7 \quad \Rightarrow \quad a = -7 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -7$

(3) $y_{\text{allg}} = -7 + ce^x$

Bsp6: $y'' + y' - 3y = x - 3x^2 + x^4$

(1) homogen: $y'' + y' - 3y = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \begin{cases} 1,3028 \\ -2,3028 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{1,3028x} + c_2 e^{-2,3028}$$

(2) Ansatz: $y_0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4$

$y_0' = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$

$y_0'' = 2c + 6dx + 12ex$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0'' + y_0' - 3y_0 = \left(2c + 6dx + 12ex\right) + \left(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3\right) - \left(a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4\right) \overset{!}{=} x - 3x^2 + x^4$$

$$\begin{bmatrix} 2c + b - 3a = 0 \\ 6d + 2c - 3b = 1 \\ 12e + 3d - 3c = -3 \\ 4e - 3d = 0 \\ -3e = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = -1,098 \\ b = -1,741 \\ c = -0,778 \\ d = -0,444 \\ e = -0,333 \end{bmatrix}$$

(3) $y_{\text{allg}} = y_0 + y_h = \left(-1,098 - 1,741x - 0,778x^2 - 0,444x^3 - 0,333x^4\right) + \left(c_1 e^{1,3028x} + c_2 e^{-2,3028}\right)$

Satz 4.7

> $a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y'' + \ldots a_n \cdot y^{(n)} = ae^{px}$
>
> Fall1: p keine Lösung der charakteristischen Gleichung
>
> $\Rightarrow$ Ansatz: $y_0 = Ae^{px}$
>
> Fall2: p ist $m-$fache Lösung der charakteristischen Gleichung
>
> $\Rightarrow$ Ansatz: $y_0 = Ax^m e^{px}$

Bew: einsetzen

Bsp7: $y'' + y = 2e^{3x}$

(1) homogen: $y'' + y = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm j = 0 \pm j \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(2) Ansatz: $p=3,$ keine Lösung, Fall 1:

$$y_0 = Ae^{3x}$$
$$y_0' = 3Ae^{3x}$$
$$y_0'' = 9Ae^{3x}$$
$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0''+y_0 = 9Ae^{3x}+Ae^{3x} = 10Ae^{3x} \overset{!}{=} 2e^{3x} \quad \Rightarrow \quad 10A=2 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{5}$$
$$y_0 = \frac{1}{5}e^{3x}$$

(3) $y_{\text{allg}} = \frac{1}{5}e^{3x} + c_1\cos x + c_2 \sin x$

Bsp8: $y''-2y'+y=e^x$

(1) homogen: $y''-2y'+y=e^x$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1 \quad (\text{zweifach}) \qquad y_1=e^x; \quad a_2=xe^x$$
$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x$$

(2) Ansatz: $p=1 \quad \Rightarrow$

$$y_0 = Ax^2\cdot e^x$$
$$y_0' = A\left(2xe^x+x^2e^x\right) = Ae^x\left(2x+x^2\right)$$
$$y_0'' = Ae^x\left(2x+x^2\right)+Ae^x\left(2+2x\right) = Ae^x\left(2+4x+x^2\right)$$
$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0''-2y_0'+y_0 = Ae^x\left(2+4x+x^2\right)-2Ae^x\left(2x+x^2\right)+Ax^2\cdot e^x = Ae^x\left[2+0\right] = 2Ae^x \overset{!}{=} e^x \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2}$$
$$y_0 = \frac{1}{2}x^2e^x$$

Bsp9: $y+y'=2e^x$

(1) $1+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1 \quad \Rightarrow \quad y=ce^{-x}$

(2) $p=1 \quad \Rightarrow \quad y_0=Ae^x$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0+y_0' = Ae^x+Ae^x = 2Ae^x \overset{!}{=} 2Ae^x \quad \Rightarrow \quad A=1 \quad \Rightarrow \quad y_0=e^x$$

(3) $y_{\text{allg}} = e^x + ce^{-x}$

Satz 4.8

> $a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \dots a_n\cdot y^{(n)} = A\cos px + B\sin px$
>
> Fall1: $j\cdot p$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung
>
> $\Rightarrow$ Ansatz: $y_0 = A\cos px + B\sin px$
>
> Fall2: $j\cdot p$ ist $m-$fache Lösung der charakteristischen Gleichung
>
> $\Rightarrow$ Ansatz: $y_0 = x^m\left[A\cos px + B\sin px\right]$

Bew: einsetzen

Bsp10: $y'' - 4y' + 4y = \sin x$

(1) homogen: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \qquad (\text{zweifach})$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

(2) $p = 1; \quad j \cdot 1 = 1; \quad$ keine Lösung $\Rightarrow$

Ansatz:
$$y_0 = A\cos x + B\sin x$$
$$y_0' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y_0'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0'' + 4y_0' + 4y_0 = (-A\cos x - B\sin x) - 4(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x)$$
$$= \sin x \underbrace{[-B + 4A + 4B]}_{1} + \cos x \underbrace{[-A - 4B + 4A]}_{0} \overset{!}{=} \sin x$$

$$\begin{bmatrix} 4A + 3B = 1 \\ 3A - 4B = 0 \end{bmatrix} \underset{\text{Cramer}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} A = 0{,}16 \\ B = 0{,}12 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad y_0 = 0{,}16 \cdot \cos x + 0{,}12 \cdot \sin x$$

(3) $y_{\text{allg}} = (0{,}16 \cdot \cos x + 0{,}12 \cdot \sin x) + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

Bsp11: $y''' - 2y'' = 0{,}2 \cdot \cos 2x$

(1) $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{zweifach} \\ \lambda = 2 & \text{einfach} \end{cases}$

$$y_1 = e^{0x} = 1$$
$$y_2 = xe^{0x} = x \qquad \Rightarrow \quad y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}$$
$$y_3 e^{2x}$$

(2) $p = 2; \quad j \cdot 2 = 2j; \quad$ keine Nullstelle

Ansatz:
$$y_0 = A\cos 2x + B\sin 2x$$
$$y_0' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$y_0'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$
$$y_0''' = 8A\sin 2x - 8B\sin 2x$$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0''' - 2y_0'' = \cos 2x[8A - 8B] + \sin 2x[8B + 8A] \overset{!}{=} 0{,}2 \cdot \cos 2x$$

$$\begin{bmatrix} 8A - 8B = 0{,}2 \\ 8A + 8B = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 0{,}0125 \\ B = -0{,}0125 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad y_0 = 0{,}0125 \cdot \cos 2x - 0{,}0125 \sin 2x$$

(3) $y_{\text{allg}} = 0{,}0125(\cos 2x - \sin 2x) + c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}$

Bsp12: $y'' + y = \sin x$

(1) homogen: $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm j \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(2) $p = 1; \quad p \cdot j = j$

Fall 2:
$$y_0 = x(A\cos x + B\sin x)$$
$$y_0' = A\cos x + B\sin x + x[-A\sin x + B\cos x] = \cos x[A + Bx] + \sin x[B - Ax]$$
$$y_0'' = -\sin x(A + Bx) + \cos x(B) + \cos x(B - Ax) + \sin(-A) = \sin x[-A - Bx - A] + \cos x[B + B - Ax]$$
$$= \sin x[-2A - Bx] + \cos x[2B - 2A]$$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0'' + y_0 = \sin x[Bx - 2A - Bx] + \cos x[Ax + 2B - Ax] \overset{!}{=} \sin x$$

$$\begin{bmatrix} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = -0{,}5 \\ B = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad y_0 = -\frac{1}{2} x \cdot \cos x$$

(3) $y_{\text{allg}} = -\frac{1}{2} x \cdot \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Bsp13: $y' + y = \cos x$

(1) homogen: $\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{-x}$

(2) Ansatz: $y_0 = A\cos x + B\sin x$

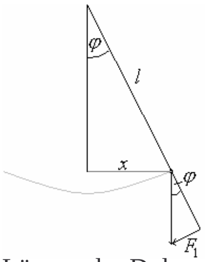
$y_0' = -A\sin x + B\cos x$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y_0' + y_0 = \sin x\left[-A+B\right] + \cos x\left[B+A\right] \overset{!}{=} \cos x$$

$$\begin{bmatrix} -A+B=0 \\ A+B=1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}$$

(3) $y_{\text{allg}} = \frac{1}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + c \cdot e^{-x}$

Bsp14: Pendel



$$\sin\varphi = \frac{F_1}{mg} = \frac{x}{l}$$

$$\left.\begin{aligned} F &= -F_1 = -mg\cdot\sin\varphi \\ F &= m\ddot{x} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -mg\cdot\sin\varphi = -mg\cdot\frac{x}{l} \quad \left(x(t) = \text{Auslenkung Ruhelage}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0} \quad \text{Dgl}$$

Lösung der Dgl

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot j = 0 \pm \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot j$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= e^{0t}\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t \\ x_2(t) &= e^{0t}\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t + c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = c_2\sin\omega t \ \text{ mit } \ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$c_2 =$ Amplitute

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f\,2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Aufsuchen einer speziellen Lösung bei $a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \ldots a_n\cdot y^{(n)} = r(x)$

$r(x)$	Bemerkung	Ansatz
Polynom Grad n		Polynom Grad $\geq n$
$a\cdot e^{px}$	$p \neq$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = A\cdot e^{px}$
$a\cdot e^{px}$	$p =$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = x^m\cdot A\cdot e^{px}$
$a\cdot\cos px + b\cdot\sin px$	$j\cdot p \neq$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = A\cdot\cos px + B\cdot\sin px$
$a\cdot\cos px + b\cdot\sin px$	$j\cdot p =$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = x^m\left(A\cdot\cos px + B\cdot\sin px\right)$

5 Anwendung von Differentialgleichungen

5.1 Anfangswertproblem (AWP)

Bsp1: Es sei M eine Menge U_{235} (Anfangsmenge). U_{235} zerfällt radioaktiv, so dass die Menge abnimmt.

Man berechne $y(t) =$ Menge zur Zeit t.

$$y(0) = M$$

$$y'(t) \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \text{Abnahme zur Zeit } t \quad \Rightarrow \quad y' \sim y \quad \Rightarrow \quad y' = -\alpha y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' + \alpha y = 0} \text{ Dgl}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\alpha \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{Lösung}$$

$$y(0) = c \cdot e^{-\alpha \cdot 0} = c = M$$

$$y(t) = M \cdot e^{-\alpha t}$$

Zusammenfassung

$$\left.\boxed{\begin{matrix} y' + \alpha y = 0 \\ y(0) = M \end{matrix}}\right\} \quad \text{Anfangswertproblem (AWP)}$$

Lösung: $\boxed{y = M \cdot e^{-\alpha t}}$ eindeutig

Bsp2: Feder $\quad (y(t) = \text{Ausschlag})$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\text{Schwingungsgleichung})$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \omega j = 0 \pm \omega j$$

$$\begin{matrix} y_1 = \cos \omega t \\ y_2 = \sin \omega t \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{allg}} = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

$$\boxed{\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = v_0 \end{matrix}} \text{ Anfangsbedingung}$$

$$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$y'(0) = c_2 \omega \cos \omega 0 = v_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

Lösung: $y = \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t$

Zusammenfassung:

$$\left.\boxed{\begin{matrix} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = v_0 \end{matrix}}\right\} \quad \text{AWP}$$

Bsp3: Ein Geschoss werde senkrecht nach oben abgeschossen. Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0.

Man berechne die Höhenfunktion $y(t)$. (Luftreibung vernachlässigt)

$$\begin{matrix} y'' = -g \\ y(0) = 0 \\ y' = v_0 \end{matrix} \quad \text{AWP} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y'' = -g \\ y' = -gt + c_1 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2 \end{matrix}$$

Anfangsbedingung:

$$y(0) = 0 = -\frac{1}{2} g 0 + c_1 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$y'(0) = v_0 = -g 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

Def. 5.1

> Ein Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben
> 1. durch eine Dgl
> 2. durch zusätzliche Anfangsbedingungen der Form
>
> $$y(a)=\alpha_0;\quad y'(a)=\alpha_1;\quad y''(a)=\alpha_2;\quad \dots\quad y^{(k)}(a)=\alpha_k$$
>
> so, dass die Lösung eindeutig wird.

Bsp4: Elektrischer Schwingkreis (R-L-C)

$i(t)=\text{Stormkreis}=?$

$q(t)=\text{Ladung}$

Energie im Kondensator $W_{\text{el}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}$

Magnetische Energie in der Spule $W_{\text{magn}}=\frac{1}{2}\cdot Li^2$

Wärmeentwicklung $\Rightarrow\ -\frac{d}{dt}\left(W_{\text{el}}+W_{magn}\right)=i^2\cdot R\ \Rightarrow\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}\cdot Li^2\right)=i^2\cdot R$

$$\Rightarrow\ -\left[\frac{q}{C}\cdot q'+L\cdot i\cdot i'\right]=i^2R\ \underset{q'=\frac{dq}{dt}=i}{\Rightarrow}\ -\frac{q}{C}-Li'=iR\ \underset{\text{ableiten}}{\Rightarrow}\ -\frac{q'}{C}-Li''=i'R\ \underset{q'=i}{\Rightarrow}\ -\frac{i'}{C}-Li''=i'R$$

$$\Rightarrow\ Li''+Ri'+\frac{1}{C}\cdot i=0$$

Anfangsbedingung $\boxed{\begin{matrix} i(0)=0 \\ i'(0)=0{,}1\end{matrix}}$ AWP

Lösung der Dgl:

$$\Rightarrow\ L\cdot\lambda^2+R\cdot\lambda+\frac{1}{C}=0\ \Rightarrow\ \lambda^2+\frac{R\lambda}{L}+\frac{1}{LC}=0\ \Rightarrow\ \lambda=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{R^2}{4L^2}<\frac{1}{LC}\ \Rightarrow\ R<\frac{2L}{\sqrt{LC}}=2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Rightarrow\ \lambda=-\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta}\pm\underbrace{\sqrt{-\frac{R^2}{4L^2}+\frac{1}{LC}}}_{\omega}\cdot j\ \Rightarrow\ \lambda=\delta\pm\omega j$$

$$\begin{matrix} i_1(t)=e^{-\delta t}\cdot\cos\omega t \\ i_2(t)=e^{-\delta t}\cdot\sin\omega t\end{matrix}\ \Rightarrow\ i_{\text{allg}}(t)=c_1e^{-\delta t}\cdot\cos\omega t+c_2e^{-\delta t}\cdot\sin\omega t$$

Bestimmung der Konstanten:

$$i(0)=c_1e^{-\delta 0}\cdot\cos\omega 0+c_2e^{-\delta 0}\cdot\sin\omega 0\ \Rightarrow\ c_1=0$$

$$i'(0)=0{,}1=c_2\left[-\delta\cdot e^{-\delta 0}\cdot\sin\omega 0+e^{-\delta 0}\omega\cdot\cos\omega 0\right]$$

Lösung des AWP:

$$i(t)=\frac{0{,}1}{\omega}\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin\omega t\ \text{ mit }\ \delta=\frac{R}{2L}\qquad \omega=2\pi f=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\ \Rightarrow\ f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

5.2 Randwertprobleme (RWP)

Bsp1: Ein Geschoss werde zur Zeit $t = 0$ nach oben abgeschossen und soll nach genau $10s$ den Boden wieder erreichen. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit?

$\boxed{\begin{array}{l} y'' = -g \\ y(0) = 0 \\ y(10) = 0 \end{array}}$ RWP

Dgl: $y'' = -g$

$y' = -gt + c_1$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 \cdot t + c_2$

$y(0) = c_2 = 0$

$y(10) = -\frac{1}{2}g \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\frac{1}{2}g \cdot 10^2}{10} = 49,05$

Lösung: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 49,05 \cdot t\,[m]$

$v_0 = y'(0) = c_1 = 49,05\frac{m}{s}$

Bsp2: Ein Kfz beschleunige während der Fahrt $10s$ lang mit $0,6\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$ und lege in dieser Zeit $250m$ zurück. Wie groß war die Geschwindigkeit zu Beginn der Beschleunigung.

$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = \text{Weg zur Zeit } t \\ y'' = 0,6 \\ y(0) = 0 \\ y(10) = 250 \end{array}}$ RWP

Dgl: $y'' = 0,6$

$y' = 0,6t + c_1$

$y = 0,3 \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$

$y(0) = 0,3 \cdot 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 = 0$

$y(10) = 0,3 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 = 250 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{250 - 30}{10} = 22$

Lösung: $y(t) = 0,3t^2 + 22t$

Geschwindigkeit: $y'(0) = 0,6 \cdot 0 + 22 = 22\frac{m}{s} \cong 79,2\frac{km}{h}$

Def. 5.2

> Ein Randwertproblem (RWP) ist gegeben
> 1. durch eine Dgl
> 2. durch zusätzliche Anfangsbedingungen der Form
> $y(a) = \alpha; \quad y(b) = \beta; \quad y(c) = \gamma; \quad \ldots \quad y(k) = \kappa$
>
> so, dass die Lösung in $a \le x \le b$ eindeutig wird.

Bsp3: $y'' - 3y = 0$

$y(0) = 0$

$y(1) = e^{\sqrt{3}}$

Randbedingungen

Dgl: $y'' - 3y = 0$

$\lambda^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{3} = 0 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}$

$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2$

$y(1) = c_1 e^{\sqrt{3}} + c_2 e^{-\sqrt{3}} = c_1\left[e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}\right] = e^{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}} = 1,03 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1,03$

Lösung: $y = 1,03e^{\sqrt{3}x} - 1,03e^{-\sqrt{3}x}$

5.3 Eigenwertprobleme (EWP)

Bsp1: Harmonische Schwingung

$y(t) =$ Auslenkung aus Ruhelage

Harmonische Schwingung: $F \sim -y(t)$

$F = m \cdot g = m \cdot y''$

$\Rightarrow \quad m \cdot y'' \sim -y \quad \Rightarrow \quad m \cdot y'' = -k \cdot y \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{k}{m} \cdot y = 0 \quad \underset{\text{sei } k=1}{\Rightarrow} \quad y'' + \frac{1}{m} \cdot y = 0$

Wie groß ist m zu wählen, damit die Frequenz $f = 1$ ist?

$f = \frac{1}{T} \quad \Leftrightarrow \quad T = 1$

$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \frac{1}{m} \cdot y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array}}$ m unbekannt, $m =$ Eigenwert, EWP

Dgl: $y'' + \frac{1}{m} \cdot y = 0$

$\lambda^2 + \frac{1}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot j = 0 \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot j$

$y_1 = \cos \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot t \qquad y_2 = \sin \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad y = c_1 \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot t + c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot t$

Randbedingungen:

$y(0) = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$y(1) = c_2 \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{1}{\sqrt{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{m}} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = 4\pi^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{4\pi^2}$

Def. 5.3

> Ein Eigenwertproblem (EWP) besteht aus
> 1. durch eine Dgl mit einem unbekannten Faktor (Eigenwert)
> 2. Randbedingungen (eventuell mit unbekanntem Faktor)

Bsp2: $y'' = -\alpha y$

$y(0) = y(2) = 0$

Dgl: $y'' + \alpha y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\alpha} \cdot j$

$\Rightarrow \quad y = c_1 \cos \sqrt{\alpha} x + c_2 \sin \sqrt{\alpha} x$

$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$y(2) = c_2 \sin \sqrt{\alpha} 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (1) \quad c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$(2) \quad \sin \sqrt{\alpha} 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\alpha} 2 = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \alpha = \frac{n^2\pi^2}{4} \qquad c_2 =$ beliebig

Bsp3: Ein Kfz werde bei der Geschw. $50\,{}^{km}\!/\!_{h}$ abgebremst, der Bremsweg beträft $20m$. Wie groß war die Verzögerung?

$s(t) =$ Weg – Zeit – Funktion

$s'' = -a \qquad a =$ Eigenwert

$s(0) = 0$

$s(T) = 20$

$s'(0) = 50\,{}^{km}\!/\!_{h} = 13{,}889\,{}^{m}\!/\!_{s}$

$s'(T) = 0$

$a = ?; \quad T = ?$

Dgl: $s'' = -a$

$s' = -at + c_1$

$s = -0{,}5at^2 + c_1 t + c_2$

$s(0) = c_2 = 0 \qquad (1)$

$s'(0) = c_1 = 13{,}889 \qquad (2)$

$s(T) = -0{,}5aT^2 + 13{,}889T = 0 \quad (3) \qquad \Rightarrow \quad T[-0{,}5aT + 13{,}889] = 20$

$s'(T) = -aT + 13{,}889 = 0 \qquad (4) \qquad \Rightarrow \quad aT = 13{,}889$

$\underset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \quad T[-0{,}5 \cdot 13{,}889 + 13{,}889] = 29 \quad \Rightarrow \quad T = 2{,}88s \qquad a = \frac{13{,}889}{T} = \frac{13{,}889}{2{,}88} = 4{,}82\frac{m}{s^2} =$ Bremsverzögerung

ANHANG: KOMPLEXWERTIGE FUNKTIONEN

1 Exponentialfunktionen

$e^{3+4j} = ?$

Def. 1.1

$$\boxed{z = a + bj \quad \Rightarrow \quad e^z = e^{a+tbj} = e^a e^{bj} \underset{\text{Euler}}{=} e^a \left(\cos b + j \cdot \sin b\right)}$$

Eulersche Formel:
$e^{\pm bj} = \cos b \pm j \cdot \sin b$

Bsp1: $e^{1+j} = e^1 e^j = e\left(\cos 1 + j \cdot \sin 1\right) = 1,469 + j \cdot 2,287$

Bsp2: $e^{1-\pi j} = e^1 e^{-\pi j} = e\left(\cos \pi - j \cdot \sin \pi\right) = -e$

Satz 1.1

$$\boxed{\text{sei } f\left(z\right) = e^z \text{ periodisch} \quad \Rightarrow \quad e^z = e^{z+2k\pi j} \qquad \left(k \in \mathbb{Z}\right)}$$

Bew: $e^{z+2k\pi j} = e^z \cdot e^{2k\pi j} = e^z \left(\cos 2k\pi + j \cdot \sin 2k\pi\right) = e^z$

2 Trigonometrische Funktionen

$$e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x$$
$$e^{-jx} = \cos x - j \cdot \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\underset{\text{addieren}}{\Rightarrow}$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cdot \cos x$$
$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j \cdot \sin x$$
$$\Rightarrow$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$$
$$\sin x = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Def. 2.1

$$\boxed{\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{jz} + e^{-jz}\right) \\ \sin z &= \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right) \qquad (z = a + bj) \end{aligned}}$$

Bsp1: $\sin j = \frac{1}{2j}\left(e^{j\cdot j} - e^{-j\cdot j}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{-1} - e^{1}\right) = \frac{j}{2j^2}\left(e^{-1} - e^{1}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} + e\right) j = -1{,}1752\, j$

Bsp2: $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |\sin x| \le 1 \qquad$ sei $\sin z = 2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{jz} - e^{-jz} = 4j \quad \underset{z=a+bj}{\Rightarrow} \quad e^{j(a+bj)} - e^{-j(a+bj)} = 4j \quad \Rightarrow \quad e^{ja}e^{bj^2} - e^{ja}e^{-bj^2} = 4j$$

$$\Rightarrow \quad (\cos a + j \cdot \sin a)e^{-b} - (\cos a - j \cdot \sin a)e^{b} = 4j \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cos a\left(e^{-b} - e^{b}\right)}_{0} + j\underbrace{\left[\sin a\left(e^{-b} + e^{b}\right)\right]}_{4} = 4j$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \cos a\left(e^{-b} - e^{b}\right) &= 0 \\ \sin a\left(e^{-b} - e^{b}\right) &= 4 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \cos a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{2}\left(e^{-b} - e^{b}\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad e^{-b} - e^{b} = 4 \quad \underset{u=e^b}{\Rightarrow} \quad u = \frac{1}{u} = 4$$

$$\Rightarrow \quad u^2 - 4u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2 \pm \sqrt{3} = e^b \quad \underset{\text{nur eine Lsg}}{\Rightarrow} \quad b = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin z \underset{z=a+bj}{=} \sin\left[\frac{\pi}{2} + j \cdot \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right] = 2$$

Anmerkung:

$$\sin x = r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |r| \le 1 & \Leftrightarrow \quad x \text{ reell} \\ |r| > 1 & \Leftrightarrow \quad x \text{ komplex} \end{cases}$$

Def. 2.2

$$\boxed{\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} \end{aligned}}$$

Bsp1: $\tan(3+4j) = ? = \frac{\sin(3+4j)}{\cos(3+4j)}$

(1) $\sin(3+4j) = \frac{1}{2j}\left[e^{j(3+4j)} - e^{-j(3+4j)}\right] = \frac{1}{2j}\left[e^{3j}e^{-4} - e^{-3j}e^{4}\right] = \frac{j}{2j^2}\left[(\cos 3 + j \cdot \sin 3)e^{-4} - (\cos 3 - j \cdot \sin 3)e^{4}\right]$

$= -3{,}854 - j \cdot 27{,}035$

(2) $\cos(3+4j) = \frac{1}{2}\left[e^{j(3+4j)} + e^{j(3+4j)}\right] = \ldots = -27{,}017 - j \cdot 3{,}851$

(3) $\tan(3+4j) = \frac{-3{,}854 - j \cdot 27{,}035}{-27{,}017 - j \cdot 3{,}851} = 0{,}2796 + j \cdot 0{,}961$

3 Logarithmusfunktion

Def. 3.1

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ln z = \ln\left[|z| \cdot e^{j\varphi}\right] = \ln|z| + \ln\left(e^{j\varphi}\right) = \ln|z| + j\varphi}$$

Bsp1: $\ln(1+3j) = ?$

$$z = 1+3j = |z| \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{1+9} \cdot e^{j\cdot 1,249} = \sqrt{10} \cdot e^{j\cdot 1,249} = \ln(1+3j) = \ln\sqrt{10} \cdot e^{j\cdot 1,249} = \ln\sqrt{10} + j\cdot 1,249 = 1,151 + j\cdot 1,249$$

Bsp2: $\ln(-1) = ?$

$$-1 = 1 \cdot e^{\pi j} \quad \Rightarrow \quad \ln(-1) = \ln \cdot e^{\pi j} = \pi j$$

Anmerkung:

$\ln x$ mit $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x =$ komplex

4 Potenzen

Def. 4.1 $$\boxed{z^w = e^{w\cdot\ln z}}$$

Bsp1: $j^j = e^{j\cdot\ln j} = e^{j[\ln|j| + j\varphi]} = e^{j\left[\ln 1 + j\cdot\frac{\pi}{2}\right]} = e^{j^2\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Bsp2: $(1-j)^{1+j} = e^{(1+j)\cdot\ln(1-j)} = e^{(1+j)\cdot\left[\ln\sqrt{2} + j\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]} = e^{(1+j)\cdot\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\cdot j\right)} = e^{\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) + j\cdot\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)}$

$= e^{\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) + j\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)\right] = 2{,}808 + j\cdot 1{,}318$

Bsp3: $1^j = e^{j\cdot\ln 1} = 1$

5 Hyperbolische Funktionen

Def. 5.1

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\\ \sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\\ \tanh z &= \frac{\sin z}{\cos z}\\ \coth z &= \frac{\cos z}{\sin z} \end{aligned}}$$

Bsp1: $\sinh(3+2j)=\frac{1}{2}\left(e^{3+2j}-e^{-3-2j}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{3}e^{2j}-e^{-3}e^{-2j}\right)=\frac{1}{2}\left[e^{3}(\cos 2+j\cdot\sin 2)-e^{-3}(\cos 2-j\cdot\sin 2)\right]$
$=-4{,}1689+j\cdot 9{,}1469$

Bsp2: $\sinh(j\cdot z)=\frac{1}{2}\left(e^{jz}-e^{-jz}\right)=j\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{jz}-e^{-jz}\right)=j\cdot\sin z \quad\Rightarrow\quad \sinh(jz)=j\cdot\sin(z)$

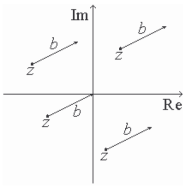
6 Die ganze lineare Funktion

$\boxed{w = az + b}$

Def. 6.1 $w = az + b$ heißt ganze lineare Funktion

Bsp1: $w = (1+3j)z + (4-2j)$

Bsp2: $w = z + b =$ Translation



Satz 6.1 Die Funktion $w = z + b$ stellt in der Gaußschen Zahlenebene eine Translation (Parallelverschiebung) dar.

Bsp3: $w = a \cdot z$

$a = |a| \cdot e^{j\varphi} = |a|(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$

$z = |z| \cdot e^{j\psi} = |z|(\cos\psi + j \cdot \sin\psi)$

$\Rightarrow \quad w = a \cdot z = |a| \cdot |z| \cdot e^{j(\varphi+\psi)} = |w| \cdot e^{j\alpha} = w$

$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} |w| = |a| \cdot |z| \\ \alpha = \varphi + \psi \end{array}}$ $\begin{array}{l} \text{- Streckung um } |a| \\ \text{- Drehung um } \varphi \end{array}$

Satz 6.2 Die Abbildung $w = a \cdot z$ ist eine Drehstreckung:
Streckung um Faktor $|a|$ und Drehung um Winkel $\arg(a) = \varphi$

Bsp4: $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) z$

Streckung: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

Drehung um 45°

Satz 6.3 Die Abbildung $w = a \cdot z$ mit $|a| = 1$ ist eine Drehung der Gaußebene um $\varphi = \arg(a)$

Bsp: Mandelbrot – Menge

$w_{j+1} = w_j + z$

$w_0 = 1$

Die Menge der Anordnung der Punkte in einer Gaußebene nennt man Mandelbrot – Menge