1. Kirchhoffsches Gesetz / Knotenregel
   An jedem Knoten gilt zu jedem Zeitpunkt: $\sum$ aller den Knoten verlassenden Ströme = Null
2. Kirchhoffsches Gesetz / Maschenregel
   In jeder Masche gilt zu jedem Zeitpunkt: $\sum$ aller in Umlaufrichtung gezählten Spannungen = Null

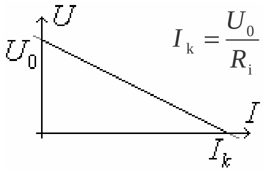
Reihen- & Parallelschaltung

Spannungsteilung / Reihenschaltung	Stromteilung / Parallelschaltung
$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$	$I_1 = I_g \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Kennlinien

<table>
<tr><td>U in Abhängigkeit von I</td><td>I in Abhängigkeit von R</td><td>U in Abhängigkeit von R</td></tr>
<tr><td>

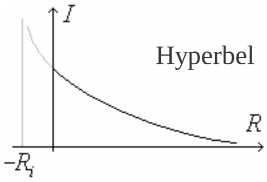
$U(I) = U_0 - R_i I$



$I_k = \frac{U_0}{R_i}$

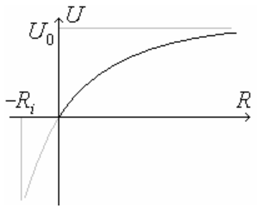
Arbeitsgerade
</td><td>

$I(R) = \frac{U_0}{R + R_i}$



Hyperbel
</td><td>

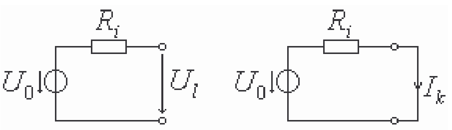
$U(R) = I \cdot R = U_0 \frac{R}{R + R_i}$



Hyperbel
</td></tr>
</table>

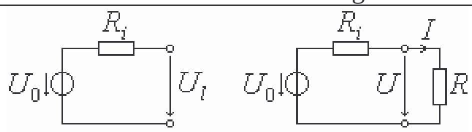
Bestimmung (Messung) von U_0 & R_i

<table>
<tr><td>Kurzschluß-Leerlauf-Messung</td><td>Leerlauf und definierte Belastung</td><td>2 unterschiedliche Lastfälle</td></tr>
<tr><td>



$U_0 = U_l$

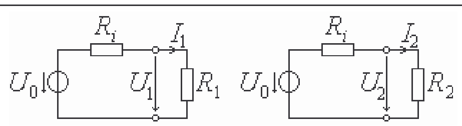
$R_i = \frac{U_l}{I_k}$
</td><td>



$U_0 = U_l$

$I = \frac{U_0}{R + R_i}$

$R_i = \frac{U_0}{I} - R = R\left(\frac{U_0}{U} - 1\right)$
</td><td>

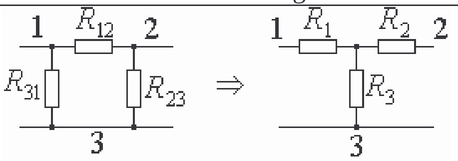


$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}$

$U_0 = U_1 + R_i I_1$
</td></tr>
</table>

Netzwerkberechnung

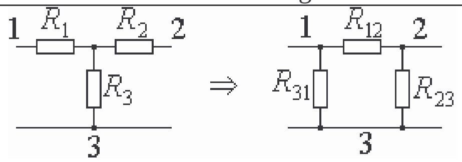
<table>
<tr><td>Dreieck-Stern-Umwandlung</td><td>Stern-Dreieck-Umwandlung</td></tr>
<tr><td>



$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$
</td><td>



$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$

$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}$

$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}$
</td></tr>
</table>

Leistungsanpassung

…

DAS ELEKTRISCHE FELD

allgemein

Die Elementarladung beträgt $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As.
Elektron (-) & Proton (+) sind Träger dieser Ladung.

Feldkonstante oder Permittivität des leeren Raumes: $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

elektrische Feldgrößen

elektrische Ladung

$Q = I\,t = C\,U$

$[Q] = \mathrm{As}$

elektrische Feldstärke

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{Q}$ $\quad E = \dfrac{U}{l}$ $\quad [\vec{E}] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}} = \dfrac{\mathrm{V\,As}}{\mathrm{As\,m}} = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Energie

$W = F\,s = Q\,E\,s = Q\,U$

$[W] = \mathrm{W\,s} = \mathrm{J}$

Spannung im inhomogenen Feld

$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

elektrische Fluss

$\psi = Q$ $\quad \psi = \int_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{a}$

elektrische Flussdichte

$D = \dfrac{\psi}{A} = \dfrac{Q}{A} = \varepsilon\,E$ $\quad$ (mit: $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$) $\quad [D] = \dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$

Berechn. elektrostatische Felder

Feld der geladenen Kugel

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad \varphi = \int_r^\infty \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

Feld des geladenen, langen, geraden Leiters

$$D = \frac{Q}{2\pi r l} \qquad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l} \qquad \varphi = \int_r^{r_a} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_r^{r_a} \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\frac{dx}{x} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_a}{r}$$

Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

Kapazität von Kondensatoren

$C = \dfrac{Q}{U}$ $\qquad [C] = \dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}$

Plattenkondensat.

$C = \varepsilon\dfrac{A}{d}$

Kugelkondensator

$C = 4\pi\varepsilon\dfrac{r_i\,r_a}{r_a - r_i}$

Zylinderkondensator

$C = \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_a}{r_i}}$

Parallelschaltung: $\quad C = \sum_{k=1}^{n} C_k$

Reihenschaltung: $\quad \dfrac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{C_k}$

Energie elektrostat. Feld

Energie des geladenen Kondensator

$W = \dfrac{1}{2}C\,U^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

Energiedichte im elektrostatischen Feld

$w = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} \underset{\text{Platten-kondensator}}{=} \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{D^2}{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}E\,D$

$W = \int_V w\,\mathrm{d}V = \dfrac{1}{2}\int_V E\,D\,\mathrm{d}V$

Kräfte zwischen elektrischen Lad

Kräfte zwischen zwei Punktladungen (Coulomb'sche Gesetz)

$F = E_1\,Q_2 = \dfrac{Q_1\,Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}$ $\qquad [F] = \dfrac{\mathrm{V\,A\,s}}{\mathrm{m}} = \mathrm{N}$

Kräfte zwischen Elektroden
(parallele Platten, Ladung gleicher Betrag, entgegensetzte Vorz.)

$F = \dfrac{1}{2}\dfrac{U^2\,C}{s}$

DAS ELEKTRISCHE STRÖMUNGSFELD

Feldgrößen

Stromdichte

$[\vec{J}] = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

$E = \rho\,J$ $\qquad J = \kappa\,E$

$\vec{E} = \rho\,\vec{J}$ $\qquad \vec{J} = \kappa\,\vec{E}$

$U = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}$

$I = \int_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A}$

Leistungsdichte

$S = \vec{E}\,\vec{J}$

$P = \int_V E\,J\,\mathrm{d}V$

Bestimmung von Widerständen

konzentrisch angeordnete, dünnwandige Metallhohlkugel, mit leitfähigen Medium

$R = \dfrac{\rho}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r_i} - \dfrac{1}{r_a}\right)$

koaxial angeordnete, dünnwandige Metallrohre, mit leitfähigen Medium

$R = \dfrac{\rho}{2\pi l}\ln\dfrac{r_a}{r_i}$

DAS MAGNETISCHE FELD

magnetische Feldgrößen

Ringspule (l = mittlere Feldlinienlänge)

elektrische Durchflutung
$\Theta = I\,N$
N : Anz der Windungen

magnet. Feldstärke
$$H = \frac{I\,N}{l} = \frac{\Theta}{l}$$
$$[H] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

einzelner gerader Leiter
$\Theta = I$
$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

magn. Kraft
$F = B\,I\,l$

magn. Flußdichte / magn. Induktion
$B = \mu H$
$$[B] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \text{Tesla} = \mathrm{T}$$

Permeabilität des leeren Raum: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

magn. Fluss
$\Phi = B\,A$
$[\Phi] = \mathrm{Vs} = \text{Weber} = \mathrm{Wb}$

$$\Phi = \int_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

magn. Spannung im Luftspalt
$V_\mathrm{m} = H\,s$
$[V_\mathrm{m}] = [H][s] = \mathrm{A}$

$$V_{\mathrm{m}12} = \int_1^2 \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Durchflutungsgesetz

magnetische Umlaufspannung
$$V_\mathrm{m} = \oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} \underset{\text{für Kreisumfang}}{=} H\,2\pi r$$

elektrische Durchflutung
$$\Theta = \oint_s \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Durchflutungsgesetz:
Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs eines geschlossenen Weges (und somit die magnetische Umlaufspannung längs dieses Weges) ist gleich der elektr. Durchflutung der Fläche, die von dem genannten Weg begrenzt wird.

$$I = \frac{H\,l}{N}$$

magnetischer Kreis

magn. Widerstand
$$R_\mathrm{m} = \frac{l}{\mu A} \qquad [R_\mathrm{m}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}$$

ohmsches Gesetz des magn. Kreises
$\Theta = \Phi\,R_\mathrm{m}$

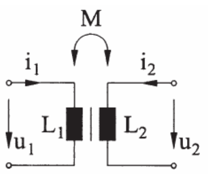
Selbstinduktion

Selbstinduktionsspannung einer Spule
$$u = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Induktivität (nicht ferromagnetisches Material)
$$L = N^2\frac{\mu A}{l} = N^2\frac{1}{R_\mathrm{m}}$$
$$[L] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \text{Henry} = \mathrm{H}$$

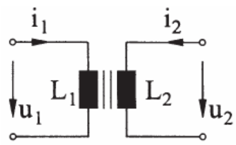
Übertrager

lose gekoppelt



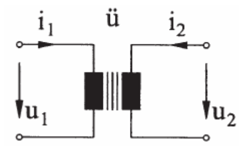
$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$M^2 = (1-\sigma)L_1L_2$$

fest gekoppelt



$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$M^2 = L_1L_2$$
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{w_1}{w_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

ideal gekoppelt



$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{w_1}{w_2} = \ddot{u}$$
$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{w_2}{w_1} = -\frac{1}{\ddot{u}}$$

DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Grundbegriffe

$\underline{z} = a + \mathrm{j}b = r\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

$|\underline{z}| = z = \sqrt{a^2+b^2}$

$a = r\cdot\cos\varphi$

$b = r\cdot\sin\varphi$

$\underline{z} = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$

$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b = r\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$

$$\varphi = \arg\underline{z} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & ,a>0 \\ \arctan\frac{b}{a}\pm\pi & ,a<0 \\ \frac{\pi}{2} & ,a=0 \text{ und } b>0 \\ -\frac{\pi}{2} & ,a=0 \text{ und } b<0 \end{cases}$$

$$\underline{z}_1\,\underline{z}_2 = z_1\,z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} \underset{\text{konjungiert erweiteren}}{\overset{\text{Komponenten schreibweise}}{\Rightarrow}} \frac{a_1a_2+b_1b_2+\mathrm{j}(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \underset{\text{konjungiert erweiteren}}{\overset{\text{Komponenten schreibweise}}{\Rightarrow}} \dots$$

GRUNDBEGRIFFE DER WECHSELSTROMTECHNIK

allgemeines über Wechselgrößen

$u = u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(\underline{U})$

$i = i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(\underline{I})$

$\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$

$\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Periodendauer
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz} \qquad [\omega] = \mathrm{s}^{-1}$$

Mittelwert
$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$$

Effektivwert RMS
$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

Gleichrichtwert
$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,\mathrm{d}t$$

Formfaktor
$$F = \frac{U}{\overline{|u|}} \underset{\text{Wechsel spannung}}{=} \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{\hat{u}\cdot 2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

EINSCHWINGVORGÄNGE MIT DGL AN GLEICHSPANNUNG ($t \ge 0$ bedeutet: Schalter wurde betätigt)

	RC – Reihenschaltung (Einschaltvorgang)	RL – Reihenschaltung (Einschaltvorgang)
Aufstellen der DGL	$t \ge 0:\ U = i\,R + u_C$ $i = C\frac{du_C}{dt} = C\,\dot u_C$ $\boxed{RC\,\dot u_C + u_C = U}$	$t \ge 0:\ U = i\,R + u_L$ $u_L = L\frac{di}{dt} = L\,\dot i$ $\boxed{\frac{L}{R}\dot i + i = \frac{U}{R}}$
homogene Lösung	$RC\,\dot u_C + u_C = 0$ Ansatz: $u_{ch} = k\,e^{pt}$ einsetzen $RC\,k\,p\,e^{pt} + k\,e^{pt} = 0 \underset{\text{kürzen}}{\overset{\text{immer}}{\Rightarrow}} RC\,p + 1 = 0$ $\Rightarrow\ p = -\frac{1}{RC}$ $\Rightarrow\ u_{ch} = k\,e^{-\frac{t}{RC}}$ Zeitkonstante $T = -\frac{1}{p} = RC$ damit $u_{ch} = k\,e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{L}{R}\dot i + i = 0$ Ansatz: $i_h = k\,e^{pt}$ einsetzen $\frac{L}{R}k\,p\,e^{pt} + k\,e^{pt} = 0 \underset{\text{kürzen}}{\overset{\text{immer}}{\Rightarrow}} \frac{L}{R}p + 1 = 0$ $\Rightarrow\ p = -\frac{R}{L}$ $\Rightarrow\ i_h = k\,e^{-\frac{tR}{L}}$ Zeitkonstante $T = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R}$ damit $i_h = k\,e^{-\frac{t}{T}}$
partikuläre Lösung	Lösung vom Typ der „Störfunktion“ (rechte Seite der DGL) Ansatz: $u_{cp} = K$ in DGL: $K = U \quad \Rightarrow \quad u_{cp} = U$	Lösung vom Typ der „Störfunktion“ (rechte Seite der DGL) Ansatz: $i_p = K$ in DGL: $K = \frac{U}{R} \quad \Rightarrow \quad i_p = \frac{U}{R}$
allg. Lsg	$u_{ca} = u_{ch} + u_{cp} = k\,e^{-\frac{t}{T}} + U$	$i_a = i_h + i_p = k\,e^{-\frac{t}{T}} + \frac{U}{R}$
spezielle Lösung	Anfangsbedingung, hier: $u_c(0_+) = 0$ Anfangsbedingungen werden immer aus den Größen gewonnen, die stetig verlaufen müssen. $k + U = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -U$ $\boxed{u_c(t) = -U\,e^{-\frac{t}{RC}} + U = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$	Anfangsbedingung, hier: $i(0_+) = 0$ Anfangsbedingungen werden immer aus den Größen gewonnen, die stetig verlaufen müssen. $k + \frac{U}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{U}{R}$ $\boxed{i(t) = -\frac{U}{R}e^{-\frac{tR}{L}} + \frac{U}{R} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)}$
	RC – Reihenschaltung (Abschaltvorgang)	RL – Reihenschaltung (Abschaltvorgang)
Lösung	$t \ge 0:$ $u_c - i\,R = 0 \underset{i = -C\dot u_c}{\Rightarrow} RC\,\dot u_c + u_c = 0$ homogene DGL $u_{ch} = k\,e^{pt}$ partikuläre Lösung existiert nicht Anfangsbedingung $u_c(0) = k = U_0$ $\boxed{u_c(t) = U_0\,e^{-\frac{t}{RC}}}$	$t \ge 0:$ $u = L\,\dot i = -i\,R \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R}\dot i + i = 0$ homogene DGL $i(t) = k\,e^{-\frac{tR}{L}}$ partikuläre Lösung existiert nicht Anfangsbedingung $i(0) \underset{\text{Kurz-schluss}}{=} \frac{U}{R_i}$ $\boxed{i(t) = \frac{U}{R_i}e^{-\frac{tR}{L}}}$

EINSCHWINGVORGÄNGE MIT DGL AN WECHSELSPANNUNG

Bsp	RC-Reihenschaltung an $u(t)=\sqrt{2}U\cos\omega t$	DGL	$RC\dot{u}_\mathrm{C}+u_\mathrm{C}=u$	hom. Lsg	$u_\mathrm{ch}=k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}$

partikuläre Lsg

vom Typ der Störfunktion

$$u_\mathrm{cp}=K\cos(\omega t+\varphi)$$

BEI SINUSFÖRMIGER ERREGUNG, PARTIKULÄRE LÖSUNG IMMER DURCH KOMPLEXE WECHSELSTROMRECHNUNG BESTIMMEN!

im Beispiel

$$u\quad\Rightarrow\quad\underline{U}=U$$

$$\underline{U}_\mathrm{c}=\underline{U}\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{U}{1+\mathrm{j}\omega RC}\underset{\omega=\frac{1}{RC}}{\overset{\text{sei speziell}}{=}}\frac{U}{1+\mathrm{j}}$$

$$U_\mathrm{c}=\frac{U}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad\hat{u}_\mathrm{cp}=\sqrt{2}U_\mathrm{c}=U$$

$$\arg\underline{U}_\mathrm{c}=-\arg\tan\frac{1}{1}=-\frac{\pi}{4}$$

$$u_\mathrm{cp}(t)=U\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

allg Lsg

$$u_\mathrm{ca}(t)=k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

spezielle Lsg

Anfangsbedingungen

$$u_\mathrm{ca}(0)=0\quad\Rightarrow\quad k+\frac{U}{\sqrt{2}}=0\quad\Rightarrow\quad k=-\frac{U}{\sqrt{2}}$$

$$u_\mathrm{c}(t)=U\left[\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

EINSCHWINGVORGANG OHNE DGL

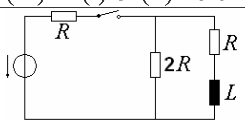
Regeln

(i) Eigenwerte bestimmen
- alle unabhängige Quellen zu Null setzen (Spannungsquelle zu Kurzschluss und Stromquelle zu Leerlauf)
- Eigenwerte des verbleibenden (passiven) Netzwerks bestimmen

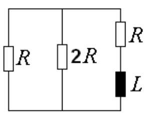
(ii) Anfangs- und Endwert bestimmen

(iii) (i) & (ii) liefern den Verlauf des Ausgleichvorgangs

Beispiel



Spannungsquelle kurzschließen $\Rightarrow$



gesmater an L in Reihe liegender Widerstand

$$R_\mathrm{S}=R+R\,||\,2R=\frac{5}{3}R$$

Zeitkonstante

$$T=\frac{3L}{5R}$$

(i) Berechnung von i_L

Anfangswert $(L\rightarrow\text{Leerlauf})$

$$i_\mathrm{L}(0)=0$$

Endwert $(L\rightarrow\text{Kurzschluss})$

Spannung an $2R\,||\,R$

$$U_\mathrm{H}=U\frac{\frac{2}{3}R}{\frac{5}{3}R}=\frac{2}{5}U$$

$$I_\mathrm{L\infty}=\frac{U_\mathrm{H}}{R}=\frac{2}{5}\frac{U}{R}$$

damit

$$i_\mathrm{L}(t)=\frac{2}{5}\frac{U}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$$

(ii) Berechnung i_2 (Strom durch $2R$)

Anfangswert

$$i_2(0)=\frac{U}{3R}\quad(\text{da } i_\mathrm{L}(0)=0)$$

Endwert

$$i_\mathrm{L}(\infty)=\frac{U_\mathrm{H}}{2R}=\frac{U}{5R}$$

damit

$$i_2(t)=\frac{U}{R}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Hinweis: Faktor vor exp ergibt sich aus: Anfangswert - Endwert

Übersicht

Zweipol	$t=0$	$t\rightarrow\infty$	für Zeigerdiagramm
C	$u=0$ Kurzschluss	$i=0$ Leerlauf	Strom eilt der Spannung um 90 Grad voraus
L	$i=0$ Leerlauf	$u=0$ Kurzschluss	Spannung eilt dem Strom um 90 Grad voraus

Energien

Während der Entladung von C an R abgegebene Energie	Während des Abschaltvorgangs von L an R abgegebene Energie
$W=\frac{1}{2}CU_0^{\,2}$	$W=\frac{1}{2}LI_0^{\,2}$

REIHENSCHWINGKREIS (lineare DGL 2. Ordnung)

DGL

$U = i\,R + L\,\dot{i} + u_c \underset{i=C\,\dot{u}_c}{\Rightarrow} \boxed{L\,C\,\ddot{u}_c + R\,C\,\dot{u}_c + u_c = U}$

einführen

(i) nomierte Zeit: $\tau := \omega_0\, t \quad \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau} = \omega_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{L\,C}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}$$

(ii) Güte

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

in DGL:

$$\frac{L\,C}{L\,C}\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{R\,C}{\sqrt{L\,C}}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}\tau} + u_c = U$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}\tau} + u_c = U}$$

homogene Lsg

Ansatz: $u_{ch} = k\,\mathrm{e}^{p\,\tau}$

einsetzen: $k\,p^2 \mathrm{e}^{p\,\tau} + \frac{k}{Q}\,p\,\mathrm{e}^{p\,\tau} + k\,\mathrm{e}^{p\,\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 + \frac{p}{Q} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}}{2Q}$

Fallunterscheidung (im Beispiel):

A) reelle Lösung

starke Dämpfung $(Q < 0{,}5)$

$p_{1,2}$ negativ reell

$$p_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4Q^2}}{2Q} =: -a$$

$$p_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4Q^2}}{2Q} =: -b$$

$$u_{ch} = K_1\,\mathrm{e}^{-a\,\tau} + K_2\,\mathrm{e}^{-b\,\tau}$$

B) komplexe Lösung

schwache Dämpfung $(Q > 0{,}5)$

$p_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\beta$

$$\alpha = \frac{1}{2\,Q}$$

$$\beta = \frac{+\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}$$

$u_{ch} = K_1\,\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{j}\beta)\tau} + K_2\,\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{j}\beta)\tau}$

Damit u_{ch} reell wird, muss $K_1 = K_2{}^*$ sein

$K_1 = 0{,}5(A - \mathrm{j}B) \quad \underset{\text{0,5: für später}}{\&} \quad K_2 = 0{,}5(A + \mathrm{j}B)$

$$u_{ch} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\,0{,}5\left[(A-\mathrm{j}B)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\tau} + (A+\mathrm{j}B)e^{-\mathrm{j}\beta\tau}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\left[A\,\cos\tau + B\,\sin\beta\,\tau\right] \underset{\text{auch}}{=} \hat{u}_{ch}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\cos(\beta\,\tau + \varphi)$$

C) doppelte Nullstelle

kritische Dämpfung, aperiodischer Grenzfall $(Q = 0{,}5)$

$$p_1 = p_2 = -\frac{1}{2\,Q} = -1$$

$$u_{ch} = k_1 \mathrm{e}^{-\tau} + k_2 \tau\,\mathrm{e}^{-\tau}$$

partkl Lsg

Ansatz: $u_{cp} = K$

in DGL: $K = U$

allg Lsg

$u_{ca} = u_{ch} + u_{cp}$

spezielle Lösung

2 offene Konstanten $\Rightarrow$ brauchen 2 Anfangsbedingungen

- ∗ Kapazitätsspannung stetig $\Rightarrow$ $u_c(0) = 0$
- ∗ Induktionsstrom stetig $\Rightarrow$ $i(0) = 0$

wegen

$i = C\,\dot{u}_c$

$\dot{u}_c(0) = 0$

Fallunterscheidung:

A) $u_{ca} = K_1\,\mathrm{e}^{-a\,\tau} + K_2\,\mathrm{e}^{-b\,\tau} + U \quad \left(\underset{\tau=0}{=} 0\right)$

$\dot{u}_{ca} = -a\,K_1\,\mathrm{e}^{-a\,\tau} - b\,K_2\,\mathrm{e}^{-b\,\tau} \quad \left(\underset{\tau=0}{=} 0\right)$

Anfangsbedingungen liefern lineares GLS für K_1 & K_2 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & K_1 \\ -a & -b & K_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -U \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = U\,\frac{b}{a-b}$$

$$K_2 = U\,\frac{a}{b-a}$$

B) $u_{ca} = U + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\left(A\,\cos\tau + B\,\sin\beta\,\tau\right)$

$\underset{\tau=0}{\Rightarrow} \quad A = -U$

$$\frac{\mathrm{d}u_{ca}}{\mathrm{d}\tau} = -\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\left(A\,\cos\tau + B\,\sin\beta\,\tau\right) + $$

$$+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\left(-A\sin\tau + B\,\beta\,con\beta\,\tau\right)$$

$\underset{\tau=0}{\Rightarrow} \quad -\alpha\,A + \beta\,B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{\alpha}{\beta}U$

C) $u_{ca} = U + k_1\mathrm{e}^{-\tau} + k_2\tau\,\mathrm{e}^{-\tau}$

$\underset{\tau=0}{\Rightarrow} \quad k_1 = -U$

$$\frac{\mathrm{d}u_{ca}}{\mathrm{d}\tau} = -k_1\,\mathrm{e}^{-\tau} + k_2\,\mathrm{e}^{-\tau} - k_2\,\tau\,\mathrm{e}^{-\tau}$$

$\underset{\tau=0}{\Rightarrow} \quad k_1 = k_2 = -U$

ORTSKURVEN (engl: locus (of points))

gebrochen lineare Funktion

Eine Funktion

$$\underline{z}(x)=\frac{\underline{a}_0+\underline{a}_1 x}{\underline{b}_0+\underline{b}_1 x}$$

heißt gebrochen linear.

Konstruktion (zB):

$x=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{z}(0)$

$x=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{z}(1)$

$x=\infty \quad \Rightarrow \quad \underline{z}(\infty)$

3 Punkte ergeben einen Kreis

Tricks

$\underline{z}(-x)=\left[\underline{z}(x)\right]^*$

$\Rightarrow$ Kreis liegt symmetrisch zur reellen Achse

$\Rightarrow$ es genügen 2 Punkte

- $z=0$ ist Elem der OK
- $\operatorname{Re}\underline{z}\geq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ Imag. Achse ist in $\underline{z}=0$ Tangente an den Kreis

$\Rightarrow$ es genügt ein Punkt

Spezialfälle:

$\underline{a}_0=0 \Rightarrow$	$\underline{z}(0)=0$	Kreis durch Ursprung
$\underline{a}_1=0 \Rightarrow$	$\underline{z}(\infty)=0$	Kreis durch Ursprung
$\underline{b}_0=0 \Rightarrow$	$\underline{z}(0)\to\infty$	Kreis entartet zur Geraden
$\underline{b}_1=0 \Rightarrow$		keine gebrochene Funktion, Gerade

In der Praxis häufig:

$\underline{z}$ nur für $x\geq 0$ gefragt $\left(\text{z.B. } \underline{Z}(\omega)\right)$

$\Rightarrow$ Halbkreis, Halbgerade

Beispiel

RL-Reihenschaltung

$$\underline{Y}(\omega)=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}$$

$a_0=1$, $b_0=R$, $a_1=0$, $b_1=\mathrm{j}L$

$\underline{Y}(-\omega)=\left[\underline{Y}(\omega)\right]^*$

$\Rightarrow$ Kreis sym. zur re. Achse

$\underline{a}_1=0 \quad \Rightarrow \quad$ Kreis durch Ur.

$\underline{Y}(0)=1/R$ reell!

$\Rightarrow$ Mittelpunkt $1/2R$, Radius $1/2R$

Einschränkung $\omega\geq 0$:

$$\underline{Y}=\frac{R-\mathrm{j}\omega L}{R^2+(\omega L)^2} \qquad \operatorname{Im}\underline{Y}<0 \text{ für } \omega>0$$

$\Rightarrow$ es ist der untere Halbkreis

Eigenschaften

- Impedanz / Admittanz von passivem (keine Quellen) Zweipol
  OK verläuft in der abgeschlossenen (imag. Achse enthalten) rechten Halbebene
- Impedanz von induktiven / Admittanz von kapazitivem passiven Zweipol
  OK verläuft im 1. Quadranten
- Impedanz von kapazitivem / Admittanz von induktivem passivem Zweipol
  OK verläuft im 4. Quadranten

Kehrwertbildung

$\underline{Z}\to\underline{Y}=\dfrac{1}{\underline{Z}}$ bzw. umgekehrt

- $*\ \varphi \quad \Rightarrow \quad \psi=-\varphi$
- $*\ \underline{Z}=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Y}\to\infty$
- $*\ \underline{Z}\to\infty \quad \Rightarrow \quad \underline{Y}=0$

- * Gerade durch Ursprung $\Rightarrow$ Gerade durch Ursprung
- * Gerade nicht durch Ursprung $\Rightarrow$ Kreis durch Ursprung. Und umgekehrt.
- * Kreis nicht durch Ursprung $\Rightarrow$ Kreis durch Ursprung

Summen von OKn

Funktion $\underline{Z}$ sei darstellbar $\underline{Z}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2$

Dann OK zu $\underline{Z}$: Geometrische Addition der OKn zu $\underline{Z}_1$ & $\underline{Z}_2$

Achtung! Punkte, die zum selben Wert des Parameters $(\text{z.B. } \omega)$ gehören, müssen addiert werden.

ÜBERLAGERUNGSPRINZIP

Quellen einer Frequenz

(i) Zeiger zu jeder Quelle berechnen

$$u_\nu(t)=\sqrt{2}\,U_\nu\cos(\omega t+\varphi_\nu) \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_\nu=U_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\nu}$$

$$i_\mu(t)=\ldots \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_\mu=\ldots$$

(ii) Nur eine Quelle wirken lassen
Spannungsq. zu Kurzschluss und Stromq. zu Lerrlauf

(iii) Zeiger der gesuchten Reaktion $(\underline{U},\ \underline{I})$ berechnen

(iv) (ii) & (iii) für alle anderen Quellen wiederholen

(v) Zeiger der Reaktionen summieren

(vi) Zur Zeitfunktion $\left(u(t),\ i(t)\right)$ übergehen

Quellen unter. Freq

(i) Nur eine Quelle wirken lassen

(ii) Zeiger dazu berechnen

(iii) Zeiger der Reaktion berechnen

(iv) Zugehörige Zeitfunktion berechnen

(v) (i) … (iv) für alle anderen Quellen wiederholen

(vi) Zeitfunktionen summieren

FOURIER - Reihen

Periodische Funktionen $(\text{Periode } T)$ können in FOURIER-Reihen entwickelt werden:

$$f(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\cos(\nu\,\omega_0\,t+\varphi_\nu) \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$c_\nu,\ \varphi_\nu$: Amplituden, Phasen der Teilschwingungen. "Fourier-Koeffizienten"

Bestimmung der $c_\nu,\ \varphi_\nu$:

$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=\overline{f}$$

$$c_\nu=\sqrt{a_\nu^{\,2}+b_\nu^{\,2}}$$

$$a_\nu=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(\nu\,\omega_0\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_\nu=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(\nu\,\omega_0\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi_\nu=\begin{cases}-\arctan\dfrac{b_\nu}{a_\nu} & a_\nu>0\\[2ex] -\arctan\dfrac{b_\nu}{a_\nu}+\pi & a_\nu<0\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} & a_\nu=0,\ b_\nu>0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & a_\nu=0,\ b_\nu<0\end{cases}$$

Klirrfaktor

$$k=\frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Gesamtsignals}}$$

VIERPOLTHEORIE (ZWEITORTHEORIE)

Impedanzmatrix

Betrachte Ströme als Ursachen, Spannungen als Wirkung.

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\,\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\,\underline{I}_2$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{z}_{11} & \underline{z}_{12}\\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}$$

oder

$$\lfloor\underline{U} = \lfloor\underline{\underline{Z}}\cdot\lfloor\underline{I}$$

Bestimmung der $\underline{z}_{\mu\nu}$

$$\underline{z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \underline{z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$$
$$\underline{z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} \qquad \underline{z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$$

Bei passiven Zweitoren gilt

$$\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21} \quad \left(\lfloor\underline{\underline{Z}}\ \text{symmetrisch}\right)$$

Admittanzmatrix

Betrachte Spannungen als Ursachen, Ströme als Wirkung.

$$\underline{I}_1 = \underline{y}_{11}\,\underline{U}_1 + \underline{y}_{12}\,\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{y}_{21}\,\underline{U}_2 + \underline{y}_{22}\,\underline{U}_2$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{y}_{11} & \underline{y}_{12}\\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$

oder

$$\lfloor\underline{I} = \lfloor\underline{\underline{Y}}\cdot\lfloor\underline{U}$$

Bestimmung der $\underline{y}_{\mu\nu}$

$$\underline{y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} \qquad \underline{y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}$$
$$\underline{y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} \qquad \underline{y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

Bei passiven Zweitoren gilt

$$\underline{y}_{12} = \underline{y}_{21} \quad \left(\lfloor\underline{\underline{Y}}\ \text{symmetrisch}\right)$$

Kettenmatrix

Fasse Strom & Spannung an je einem Tor zusammen

$$\underline{U}_1 = \underline{a}_{11}\,\underline{U}_2 + \underline{a}_{12}\,\underline{I}_2'$$
$$\underline{I}_1 = \underline{a}_{21}\,\underline{U}_2 + \underline{a}_{22}\,\underline{I}_2'$$
$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_1\end{pmatrix} = \lfloor\underline{\underline{A}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2'\end{pmatrix}$$

Man sieht:

$$[\underline{a}_{11}] = [\underline{a}_{22}] = 1$$
$$[\underline{a}_{12}] = \Omega$$
$$[\underline{a}_{21}] = \mathrm{S}$$

Bestimmung der $\underline{a}_{\mu\nu}$

$$\underline{a}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2'=0} \qquad \underline{a}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2'=0}$$
$$\underline{a}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2'}\right|_{\underline{U}_2=0} \qquad \underline{a}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2'}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

Bei passiven Zweitoren gilt

$$\det\lfloor\underline{\underline{A}} = 1$$

Hypridmatrix

$$\underline{U}_1 = \underline{h}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{h}_{12}\,\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{h}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{h}_{22}\,\underline{U}_2$$
$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{h}_{11} & \underline{h}_{12}\\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$

$$[\underline{h}_{12}] = [\underline{h}_{21}] = 1$$
$$[\underline{h}_{11}] = \Omega$$
$$[\underline{h}_{22}] = \mathrm{S}$$

Zusammenschaltungen

Reihenschaltung von Zweitoren

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \left(\lfloor\underline{\underline{Z}}_1 + \lfloor\underline{\underline{Z}}_2\right)\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow$$
$$\boxed{\lfloor\underline{\underline{Z}} = \lfloor\underline{\underline{Z}}_1 + \lfloor\underline{\underline{Z}}_2}$$

Parallelschaltungen von Zweitoren

$$\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \left(\lfloor\underline{\underline{Y}}_1 + \lfloor\underline{\underline{Y}}_2\right)\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow$$
$$\boxed{\lfloor\underline{\underline{Y}} = \lfloor\underline{\underline{Y}}_1 + \lfloor\underline{\underline{Y}}_2}$$

Kettenschaltung von Zweitoren

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_1\end{pmatrix} = \lfloor\underline{\underline{A}}_1\cdot\lfloor\underline{\underline{A}}_2\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2'\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow$$
$$\boxed{\lfloor\underline{\underline{A}} = \lfloor\underline{\underline{A}}_1\cdot\lfloor\underline{\underline{A}}_2}$$

Beachte! Im Allgemeine ist

$$\lfloor\underline{\underline{A}}_1\cdot\lfloor\underline{\underline{A}}_2 \neq \lfloor\underline{\underline{A}}_2\cdot\lfloor\underline{\underline{A}}_1$$

Zusammenhänge

Zusammenhang zwischen $\lfloor\underline{\underline{Y}}$ & $\lfloor\underline{\underline{Z}}$

$$\lfloor\underline{\underline{Y}}\cdot\lfloor\underline{\underline{Z}} = \lfloor\underline{\underline{E}}$$
$$\Rightarrow$$
$$\boxed{\begin{aligned}\lfloor\underline{\underline{Y}} &= \lfloor\underline{\underline{Z}}^{-1}\\ \lfloor\underline{\underline{Z}} &= \lfloor\underline{\underline{Y}}^{-1}\end{aligned}}$$

Zusammenhang zwischen $\lfloor\underline{\underline{A}}$ & $\lfloor\underline{\underline{Z}}$

$$\underline{a}_{11} = \frac{\underline{z}_{11}}{\underline{z}_{21}}$$
$$\underline{a}_{12} = -\frac{1}{\underline{y}_{21}} = \frac{\underline{z}_{11}\,\underline{z}_{22} - \underline{z}_{12}\,\underline{z}_{21}}{\underline{z}_{21}}$$
$$\underline{a}_{21} = \frac{1}{\underline{z}_{21}}$$
$$\underline{a}_{22} = \frac{\underline{z}_{22}}{\underline{z}_{21}}$$

Inversion einer 2×2 - Matrix

$$\lfloor\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$
$$\lfloor\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det\lfloor\underline{\underline{A}}}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$$
$$\det\lfloor\underline{\underline{A}} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

DREHSTROMTECHNIK

Erzeugung

In den Ständerwicklungen $(\mathrm{U, V, W})$ werden Spannungen induziert

* gleiche Amplitude
* gleiche Frequenz
* um je $^{2\pi}\!/_{3}$ $(120°)$ phasenverschoben

$$u_{\mathrm{U}}(t) = \sqrt{2}\,U\cos(\omega t)$$
$$u_{\mathrm{V}}(t) = \sqrt{2}\,U\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$u_{\mathrm{W}}(t) = \sqrt{2}\,U\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Sternschaltung

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{\mathrm{U}} = U$$
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{\mathrm{V}} = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$
$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{\mathrm{W}} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Dreieckschaltung

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$$

Voraussetzung

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ alle Effektivwerte gleich} \\ * \text{ Phasendifferenz } {}^{2\pi}\!/_{3} \end{array}\right\} \text{Symmetrische Drehstromquelle}$$

Schreibweisen

$$\underline{a} := \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right) \quad \Rightarrow$$
$$\underline{U}_{\mathrm{U}} = U\,\underline{|0°} = U$$
$$\underline{U}_{\mathrm{V}} = U\,\underline{|-120°} = U\,\underline{a}^2$$
$$\underline{U}_{\mathrm{W}} = U\,\underline{|120°} = U\,\underline{a}$$
$$\underline{a}^2 + \underline{a} + 1 = 0$$

$$\underline{U}_2 = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = U\,\underline{|-120°}$$

Analog für Ströme, Impedanzen, …

verkettete Spannungen

$$\underline{U}_{12} = 400\mathrm{V}\,\underline{|30°}$$
$$\underline{U}_{23} = 400\mathrm{V}\,\underline{|-90°}$$
$$\underline{U}_{31} = 400\mathrm{V}\,\underline{|150°}$$

symm. Last an symm. Quelle

Ohmsche Last in Sternschaltung

$$\underline{I}_{1\mathrm{S}} = \frac{\underline{U}_1}{R} = \frac{U}{R}$$
$$\underline{I}_{2\mathrm{S}} = \frac{U}{R}\,\underline{a}^2$$
$$\underline{I}_{3\mathrm{S}} = \frac{U}{R}\,\underline{a}$$

Ohmsche Last in Dreieckschaltung

$$U_{12} = \sqrt{3}\,U$$

Strangströme in Δ-Schaltung

$$I_{12} = \frac{\sqrt{3}\,U}{R} = \sqrt{3}\,I_{1\mathrm{S}} = I_{23} = I_{31}$$

Außenleiterströme in Dreieckschaltung:

$$\underline{I}_{1\mathrm{D}} = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$$
$$\underline{I}_{2\mathrm{D}} = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$$
$$\underline{I}_{3\mathrm{D}} = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Effektivwerte:

$$I_{1\mathrm{D}} = \sqrt{3}\,I_{12} = 3\,I_{1\mathrm{S}} = I_{2\mathrm{D}} = I_{3\mathrm{D}}$$

Phasenlagen:

$\underline{I}_{1\mathrm{D}}$ in Phase mit $\underline{U}_1$

$$\underline{I}_{1\mathrm{D}} = 3\frac{U}{R}$$
$$\underline{I}_{2\mathrm{D}} = 3\frac{U}{R}\,\underline{a}^2$$
$$\underline{I}_{2\mathrm{D}} = 3\frac{U}{R}\,\underline{a}$$

Reaktive Last in Sternschaltung

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$
$$\underline{I}_{1\mathrm{S}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{U}{|\underline{Z}|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$
$$\underline{I}_{2\mathrm{S}} = \frac{U}{|\underline{Z}|}\,\underline{a}^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$
$$\underline{I}_{3\mathrm{S}} = \frac{U}{|\underline{Z}|}\,\underline{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

Effektivwerte:

$$I_{1\mathrm{S}} = I_{2\mathrm{S}} = I_{3\mathrm{S}} = \frac{U}{|\underline{Z}|}$$

Dreieckschaltung: ganz analog

$$I_{12} = \sqrt{3}\,I_{1\mathrm{S}}$$
$$I_{1\mathrm{D}} = 3\,I_{1\mathrm{S}}$$
$$\underline{I}_{1\mathrm{D}} = \frac{3U}{|\underline{Z}|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

unsymm. Last an symm. Quelle

Ohmsche Last in Sternschaltung mit Nullleiter

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R_1}$$
$$\underline{I}_2 = \frac{U}{R_2}\,\underline{a}^2$$
$$\underline{I}_3 = \frac{U}{R_3}\,\underline{a}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = U\left[\frac{1}{R_1} + \frac{\underline{a}^2}{R_2} + \frac{\underline{a}}{R_3}\right]$$
$$I_{\mathrm{N}} \le I_{\mathrm{v\,max}}$$

Ohmsche Last in Sternschaltung ohne Nullleiter

$$\underline{I}_1\,R_1 - \underline{I}_2\,R_2 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2\,R_2 - \underline{I}_3\,R_3 = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$$
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Verschiebung des Sternpunktes:

$$\underline{U}_{\mathrm{N}} = \underline{U}_1 - \underline{I}_1\,R_1$$
$$= \frac{\underline{U}_1\,R_2\,R_3 + \underline{U}_2\,R_1\,R_3 + \underline{U}_3\,R_1\,R_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

Ohmsche Last in Dreieckschaltung

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{R_{12}}$$
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{R_{12}} - \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_1}{R_{31}}$$

Reaktive Last in Sternschaltung mit Nullleiter

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_1}$$
$$\underline{I}_2 = \frac{U}{\underline{Z}_2}\,\underline{a}^2$$
$$\underline{I}_3 = \frac{U}{\underline{Z}_3}\,\underline{a}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

LEISTUNG IM DREHSTROMSYSTEM

Berechnung der Leistung

$$P = U_1\, I_1 + U_2\, I_2 + U_3\, I_3$$

$$P = \left(U_1 - U_2\right) I_{12} + \left(U_2 - U_3\right) I_{23} + \left(U_3 - U_1\right) I_{31}$$

gilt für:

- Zeitfunktion / Zeiger
- Augenblicksleistung / komplexe Leistung
- Wirk- / Blind- / Scheinleistung

Augenblicksleistung im symmetrischen System

$$p(t) = u_1\, i_1 + u_2\, i_2 + u_3\, i_3$$

$$= 2U\, I \left[\cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{2}\right) \right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = 0{,}5\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

$$= U\, I \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos\varphi + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos\varphi \right]$$

$= 3U\, I \cos\varphi = P_\mathrm{W} =$ konstant für alle symmetrischen Belastungen

$$\underline{P} = U\, I\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + U\, \underline{a}^2 \cdot I \left(\underline{a}^2\right)^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + U\, \underline{a} \cdot I\, \underline{a}^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

$$= 3U\, I\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

$$P_\mathrm{S} = 3U\, I = \left|\underline{P}\right| \qquad \left[P_\mathrm{S}\right] = \mathrm{VA}$$

$$P_\mathrm{W} = 3U\, I \cos\varphi = \mathrm{Re}\left(\underline{P}\right) \qquad \left[P_\mathrm{W}\right] = \mathrm{W}$$

$$P_\mathrm{B} = 3U\, I \sin\varphi = \mathrm{Im}\left(\underline{P}\right) \qquad \left[P_\mathrm{B}\right] = \mathrm{var}$$

$$\underline{P} = U\, \underline{I}^* = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = U^2\, \underline{Y}^*$$

$$P_\mathrm{S}^{\,2} = P_\mathrm{W}^{\,2} + P_\mathrm{B}^{\,2}$$

$$\tan\varphi = \frac{P_\mathrm{B}}{P_\mathrm{W}} \qquad \cos\varphi = \frac{P_\mathrm{B}}{P_\mathrm{W}}$$

unsymmetrische Last

$$\underline{P} = U\left[\underline{I}_{1\mathrm{D}} \cdot \mathrm{e}^{\Delta\varphi_1} + \underline{I}_{2\mathrm{D}} \cdot \mathrm{e}^{\Delta\varphi_2} + \underline{I}_{3\mathrm{D}} \cdot \mathrm{e}^{\Delta\varphi_3}\right]$$

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_{U1} - \varphi_{I1\mathrm{D}}$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_{U2} - \varphi_{I2\mathrm{D}}$$

$$\Delta\varphi_3 = \varphi_{U3} - \varphi_{I3\mathrm{D}}$$

Blindleistungs-kompensation

Reaktiver Verbraucher, der Blindleistung umgekehrten Vorzeichens aufnimmt, wird parallel geschaltet.

$$P_{\mathrm{B\,neu}} = P_\mathrm{B} \cdot \tan\varphi_\mathrm{neu}$$

$$\Delta P_\mathrm{B} = P_{\mathrm{B\,neu}} - P_\mathrm{B}$$